

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Л.Л. Клюев

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

У Ч Е Б Н И К



ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

серия основана в 1996 г.



Л.Л. КЛЮЕВ

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

*Утверждено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебника для студентов
учреждений высшего образования по специальностям
«Инфокоммуникационные технологии (по направлениям)»,
«Инфокоммуникационные системы»,
«Защита информации в телекоммуникациях»*

Минск
«Новое знание»

Москва
«ИНФРА-М»

2016

УДК 621.391(075.8)
ББК 32.88-01я73
К52

Рецензенты:

кафедра «Системы передачи информации» Белорусского государственного университета транспорта (зав. кафедрой — доцент *В.Г. Шевчук*);
зав. кафедрой «Информационные технологии в управлении» Белорусского национального технического университета, доктор технических наук, профессор *В.Ф. Голиков*

Клюев, Л.Л.
К52 Теория электрической связи : учебник / Л.Л. Клюев. — Минск : Новое знание ; М. : ИНФРА-М, 2016. — 448 с. : ил. — (Высшее образование).

ISBN 978-985-475-800-8 (Новое знание).

ISBN 978-5-16-011447-7 (ИНФРА-М).

Изложена теория электрической связи, включающая основы теории сигналов, теории информации, теории оптимальных методов приема сигналов на фоне помех. Рассмотрены математические модели и характеристики сигналов, помех и каналов. Описаны вопросы синтеза оптимальных приемников для заданных сигналов и нормального белого шума и оценки потенциальной помехоустойчивости. Формулируются основные положения теории разделения дискретных сигналов на фоне флуктуационных помех, включая взаимную помеху.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по телекоммуникационным специальностям.

УДК 621.391(075.8)
ББК 32.88-01я73

ISBN 978-985-475-800-8 (Новое знание)
ISBN 978-5-16-011447-7 (ИНФРА-М)

© Клюев Л.Л., 2016
© ООО «Новое знание», 2016

Оглавление

Предисловие	9
Список сокращений	10
Введение	11
Глава 1. Основные понятия теории связи	14
1.1. Информация, сообщение, сигнал.....	14
1.2. Связь, сеть связи, система связи.....	17
1.3. Кодирование и модуляция.....	23
1.4. Демодуляция и декодирование	26
1.5. Основные характеристики систем связи	27
<i>Контрольные вопросы.....</i>	<i>30</i>
Глава 2. Детерминированные сигналы и их математические модели	31
2.1. Разложение детерминированных функций в ортогональные ряды	31
2.2. Спектральная плотность сигнала	38
2.3. Спектральная плотность мощности детерминированного сигнала.....	51
2.4. Автокорреляционная функция.....	52
2.5. Комплексное и квазигармоническое представление узкополосных сигналов.....	66
2.6. Геометрические представления сигналов	70
2.7. Теорема Котельникова	76
2.8. Ряд Уолша.....	83
<i>Контрольные вопросы.....</i>	<i>88</i>
Глава 3. Методы формирования и преобразования сигналов	89
3.1. Определения линейной, нелинейной и параметрической систем	89
3.2. Преобразование сигналов в параметрических и нелинейных цепях.....	90
3.2.1. Линейные преобразования дискретного спектра.....	90
3.2.2. Линейное преобразование непрерывной спектральной плотности.....	92
3.2.3. Преобразование дискретного спектра параметрической цепью.....	94
3.2.4. Преобразование спектральной плотности параметрической цепью.....	95
3.2.5. Безынерционное преобразование дискретного спектра	97
3.2.6. Безынерционное преобразование спектральной плотности	103
3.3. Преобразование частоты. Модуляция и детектирование.....	105
3.3.1. Преобразование частоты.....	105
3.3.2. Модуляция.....	108
3.3.3. Детектирование	112

3.4. Амплитудная модуляция гармонического переносчика.....	113
3.4.1. Модулирующие сигналы.....	113
3.4.2. Амплитудная непрерывная модуляция с подавленной несущей.....	114
3.4.3. Амплитудная непрерывная модуляция с большим уровнем несущей.....	117
3.4.4. Двоичная амплитудная модуляция.....	121
3.4.5. Амплитудная модуляция с одной боковой полосой.....	123
3.4.6. Векторное представление непрерывных амплитудно-модулированных сигналов.....	124
3.5. Частотная модуляция гармонического переносчика.....	126
3.5.1. Непрерывный частотно-модулированный сигнал с малым индексом модуляции.....	126
3.5.2. Непрерывный частотно-модулированный сигнал с большим индексом модуляции.....	129
3.5.3. Методы формирования непрерывного частотно-модулированного сигнала.....	131
3.5.4. Дискретная частотная модуляция.....	134
3.6. Фазовая модуляция гармонического переносчика.....	138
3.6.1. Непрерывная фазовая модуляция.....	138
3.6.2. Двоичная фазовая модуляция.....	138
3.6.3. Многократная фазовая модуляция.....	141
3.6.4. Квадратурная амплитудная модуляция.....	145
3.6.5. Квадратурная двоичная фазовая модуляция.....	146
3.7. Дискретная модуляция шумоподобного сигнала.....	147
3.7.1. Двоичная модуляция постоянного тока.....	147
3.7.2. Генерирование шумоподобных сигналов.....	148
3.7.3. Модуляция шумоподобного сигнала по форме.....	152
3.8. Модуляция импульсного переносчика.....	158
3.8.1. Амплитудно-импульсная модуляция.....	158
3.8.2. Широтно-импульсная и фазо-импульсная модуляция.....	160
3.8.3. Импульсно-кодовая модуляция.....	163
3.8.4. Дифференциальная импульсно-кодовая модуляция.....	165
3.8.5. Дельта-модуляция.....	168
3.9. Некогерентное детектирование.....	170
3.9.1. Некогерентное детектирование непрерывного амплитудно-модулированного сигнала.....	170
3.9.2. Некогерентное детектирование двоичных сигналов.....	173
3.9.3. Детектирование непрерывного частотно-модулированного сигнала.....	175
3.9.4. Детектирование сигнала с амплитудно-импульсной модуляцией.....	178
3.9.5. Декодирование сигнала с импульсно-кодовой модуляцией.....	179

3.9.6. Декодирование сигнала с дифференциальной импульсно-кодовой модуляцией.....	179
3.9.7. Декодирование дельта-модулированного сигнала.....	180
3.9.8. Детектирование сигналов с широтно-импульсной модуляцией и с фазо-импульсной модуляцией.....	183
3.10. Когерентное детектирование.....	183
3.10.1. Математическая модель когерентного детектора.....	183
3.10.2. Когерентное детектирование амплитудно-модулированного сигнала с одной боковой полосой.....	185
3.10.3. Когерентное детектирование двоичного фазо-модулированного сигнала.....	187
3.10.4. Детектирование сигналов с относительной фазовой модуляцией.....	188
3.10.5. Детектирование шумоподобных сигналов.....	191
3.11. Цифровая обработка сигналов.....	194
3.11.1. Цифровые и дискретные фильтры.....	194
3.11.2. Влияние дискретизации и квантования на качество передаваемой информации.....	196
3.11.3. Дискретное преобразование Фурье.....	202
3.11.4. Быстрое преобразование Фурье.....	204
3.11.5. Дискретное преобразование Уолша.....	205
3.11.6. Линейная цифровая фильтрация.....	206
<i>Контрольные вопросы.....</i>	<i>210</i>
Глава 4. Случайные сигналы и их математические модели.....	212
4.1. Математические модели непрерывных случайных процессов.....	212
4.2. Математические модели дискретных случайных процессов.....	221
4.3. Функция корреляции и спектральная плотность мощности.....	224
4.4. Нормальный случайный процесс.....	227
4.5. Узкополосные случайные процессы.....	231
4.6. Геометрические представления случайных сигналов и помех.....	235
<i>Контрольные вопросы.....</i>	<i>236</i>
Глава 5. Каналы связи.....	238
5.1. Общие сведения о каналах передачи информации.....	238
5.1.1. Классификация каналов.....	238
5.1.2. Краткие сведения о причинах искажений сигналов.....	239
5.1.3. Помехи в каналах связи.....	243
5.2. Математические модели каналов связи.....	245
5.2.1. Модель непрерывного канала без шума.....	245
5.2.2. Модель непрерывного канала с аддитивным гауссовым шумом.....	246
5.2.3. Канал с неопределенной фазой сигнала.....	248

5.2.4. Канал с межсимвольной интерференцией и аддитивным шумом	249
5.2.5. Математические модели дискретных каналов связи.....	250
5.2.6. Математическая модель дискретно-непрерывного канала связи	252
5.2.7. Особенности оптических каналов связи	253
5.3. Воздействие сигналов и помех на звенья каналов связи	255
5.3.1. Постановка задачи	255
5.3.2. Прохождение случайных сигналов и помех через линейные системы.....	256
5.3.3. Прохождение случайных сигналов и помех через нелинейные системы.....	258
5.3.4. Прохождение суммы гармонического сигнала и узкополосного шума через когерентный детектор	262
5.3.5. Прохождение суммы гармонического сигнала и узкополосного шума через некогерентный детектор	264
<i>Контрольные вопросы.....</i>	<i>267</i>
Глава 6. Теория передачи сообщений	268
6.1. Общие сведения	268
6.1.1. Количество информации в дискретных сообщениях. Понятие энтропии.....	268
6.1.2. Производительность источника дискретных сообщений. Скорость передачи информации	274
6.2. Информационные характеристики источников непрерывных сообщений.....	276
6.2.1. Дифференциальная энтропия.....	276
6.2.2. Скорость передачи информации	281
6.2.3. Эпсилон-энтропия.....	282
6.3. Пропускная способность канала связи	287
6.3.1. Пропускная способность дискретного канала связи	287
6.3.2. Пропускная способность непрерывного канала связи.....	289
<i>Контрольные вопросы.....</i>	<i>293</i>
Глава 7. Теория помехоустойчивости систем связи.....	294
7.1. Оптимальный прием сигналов, известных точно. Критерии оптимального приема	294
7.2. Синтез оптимальных приемников дискретных сигналов, известных точно.....	300
7.2.1. Реализация оптимального приема на базе коррелятора	300
7.2.2. Бинарное обнаружение сигналов	304
7.2.3. Бинарное распознавание сигналов	310
7.2.4. Реализация алгоритма оптимального приема на основе согласованных фильтров	315

7.3. Оптимальный прием дискретного сигнала со случайными параметрами	324
7.3.1. Оптимальный прием при неопределенной фазе дискретного сигнала	324
7.3.2. Оптимальный прием при неопределенной фазе и амплитуде сигнала	341
7.4. Неоптимальные методы приема дискретных сообщений	342
7.5. Прием дискретных сообщений в каналах с рассеянием	346
7.6. Борьба с импульсными, сосредоточенными и межсимвольными помехами	349
7.7. Помехоустойчивость приема дискретных сигналов	351
7.7.1. Потенциальная помехоустойчивость приема двоичных сигналов, известных точно	351
7.7.2. Помехоустойчивость оптимального приема одного из m сигналов, известных точно	356
7.7.3. Помехоустойчивость оптимального приема дискретных сигналов с неизвестными (случайными) начальными фазами	363
7.7.4. Помехоустойчивость оптимального приема амплитудно-модулированного сигнала с неизвестной (случайной) начальной фазой	364
7.8. Оптимальный прием непрерывных сообщений	366
7.8.1. Показатели качества передачи	366
7.8.2. Прием сигнала, модулированного сообщением	368
7.8.3. Сравнительная оценка помехоустойчивости систем передачи непрерывных сообщений	371
7.9. Цифровые методы передачи непрерывных сообщений	380
7.9.1. Общие сведения о цифровых методах передачи. Помехоустойчивость цифровых методов передачи непрерывных сообщений	380
7.9.2. Структурная схема системы передачи непрерывных сообщений цифровым способом	383
7.9.3. Мощность шума квантования	384
7.9.4. Влияние помех на качество передачи сообщений	385
7.9.5. Влияние квантования и помех на качество передачи сообщений	387
<i>Контрольные вопросы</i>	389
Глава 8. Основы теории разделения сигналов	390
8.1. Угруппенная структурная схема многоканальной системы связи	390
8.2. Решение проблемы разделения сигналов в рамках теории оптимальных методов приема сигналов на фоне помех	393
8.3. Условие линейного разделения сигналов	394

8.4. Разделение группового сигнала оптимальными приемниками	395
8.4.1. Синхронные системы. Параллельная передача информации	395
8.4.2. Асинхронные системы.....	403
8.5. Частотное разделение дискретных канальных сигналов.....	405
8.6. Разделение сигналов по форме	408
8.7. Фазовое разделение дискретных сигналов.....	412
8.8. Временное разделение сигналов	414
8.9. Пространственное разделение сигналов.....	416
8.10. Поляризационное разделение сигналов	418
<i>Контрольные вопросы.....</i>	<i>419</i>
Глава 9. Эффективность систем связи	421
9.1. Оценка эффективности систем связи.....	421
9.2. Принципы системного подхода к исследованию и разработке систем связи.....	423
9.3. Анализ систем связи по их эффективности	425
9.3.1. Энергетическая и частотная эффективность систем связи.....	425
<i>Контрольные вопросы.....</i>	<i>429</i>
Заключение	430
Приложения	432
1. Дельта-функция, ее свойства.....	432
2. Коды Баркера	433
3. Ортогональные коды	434
4. Симплексные коды.....	437
Литература	439

Предисловие

В учебнике изложены теоретические основы электрической связи (электросвязи), которые являются базовыми для подготовки инженеров по специальностям: «Инфокоммуникационные технологии (по направлениям)», «Инфокоммуникационные системы», «Защита информации в телекоммуникациях».

В основу книги положено исправленное, переработанное и дополненное издание 2008 г., построенное на материале лекций, читавшихся автором на протяжении ряда лет в Белорусском государственном университете информатики и радиоэлектроники и в Высшем государственном колледже связи.

Значительное внимание уделено физическому толкованию понятий и математическим выкладкам. Объем сведений из курса высшей математики, читаемого на первом и втором курсах вузов, достаточен для понимания излагаемого материала. Усвоению материала способствуют примеры решения задач. Формулы и соотношения математического анализа позволяют производить инженерные расчеты. Для закрепления материала каждая глава содержит контрольные вопросы.

Автор выражает благодарность:

□ коллективу кафедры и заведующему кафедрой «Защита информации» Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники профессору, доктору технических наук Л.М. Лынькову за участие в обсуждении книги;

□ коллективу кафедры «Системы передачи информации» Белорусского государственного университета транспорта за участие в обсуждении книги; рецензенту, заведующему этой кафедрой, доценту В.Г. Шевчуку за содержащиеся в рецензии критические замечания;

□ рецензенту, заведующему кафедрой «Информационные технологии в управлении» Белорусского национального технического университета профессору, доктору технических наук В.Ф. Голикову за содержащиеся в рецензии критические замечания.

Обсуждение и рецензионные замечания способствовали улучшению книги.

Список сокращений

АИМ	— амплитудно-импульсная модуляция
АМ	— амплитудная модуляция
АМ-БУН	— амплитудная модуляция с большим уровнем несущей
АМ-ОБП	— амплитудная модуляция с одной боковой полосой
АМ-ПН	— амплитудная модуляция с подавленной несущей
АЦП	— аналого-цифровой преобразователь
АЧХ	— амплитудно-частотная характеристика
БПФ	— быстрое преобразование Фурье
ДИКМ	— дифференциальная импульсно-кодовая модуляция
ДМ	— дельта-модуляция
ДПФ	— дискретное преобразование Фурье
ДФМ	— двукратная фазовая модуляция
ИКМ	— импульсно-кодовая модуляция
КАМ	— квадратурная амплитудная модуляция
ОФМ	— относительная фазовая модуляция
СФ	— согласованный фильтр
ФИМ	— фазо-импульсная модуляция
ФМ	— фазовая модуляция
ФНЧ	— фильтр нижних частот
ФЧХ	— фазо-частотная характеристика
ЦАП	— цифроаналоговый преобразователь
ЦОС	— цифровая обработка сигналов
ЦФ	— цифровой фильтр
ЧИМ	— частотно-импульсная модуляция
ЧМ	— частотная модуляция
ШИМ	— широтно-импульсная модуляция
ШС	— шумоподобный сигнал

ВВЕДЕНИЕ

Теория и техника электросвязи (далее — связи) неразрывны с открытиями, которые были сделаны в начале XIX в. В 1800 г. А. Вольта создал химический источник тока. Открытие, сделанное в 1820 г. Х. Эрстедом, касалось способности электрического тока отклонять магнитную стрелку. В том же году А. Ампер предложил использовать магнитное действие электрического тока для передачи по проводам буквенного текста. В 1831 г. М. Фарадей открыл закон электромагнитной индукции, устанавливающий связь между электрическими и магнитными возмущениями. Б. Якоби в 1839 г. предложил телеграфный аппарат, записывающий сигнал в виде ломаной линии. С. Морзе изобрел и в 1837 г. продемонстрировал телеграфный аппарат, предложил телеграфную азбуку, в которой буквы обозначались комбинацией точек и тире. Эта азбука используется до сих пор.

В России первая линия связи с пишущим телеграфным аппаратом была введена в 1841 г. (между Зимним дворцом и Главным штабом в Петербурге), а в США — в 1844 г. (между Вашингтоном и Балтимором).

Развитие телеграфа послужило толчком к созданию телефона. Первый опыт использования электричества для передачи речи на расстояние относится к 1837 г. Спустя 40 лет А. Белл запатентовал телефон. Для передачи речи вначале использовались телеграфные линии, но качество принимаемых сообщений было низкое. Поэтому началось строительство специальных двухпроводных телефонных линий. Одна из таких линий была построена в 1898 г. между Петербургом и Москвой.

Начало внедрения телефонной связи в нашей республике относится к 1891 г., когда в Минске был установлен первый телефон. Строительство телефонной сети общего пользования началось в 1896 г.

Теоретические основы радиосвязи были разработаны Дж. Максвеллом. В его работе «Трактат об электричестве и магнетизме» (1873) впервые сформулирован важный для практического использования вывод: любой проводник, по которому протекает переменный ток, излучает в пространство электромагнитные волны, которые распространяются со скоростью света. Экспериментально

это было подтверждено Г. Герцом в 1888 г. Он осуществил излучение электромагнитных волн в пространство и обнаружил их при помощи простейшего резонатора.

Впервые передача сообщения на расстояние с помощью электромагнитных волн была продемонстрирована в 1895 г. А.С. Поповым при помощи разработанного для этой цели приемника.

В начале 1900 г. приемник А.С. Попова был применен для радиосвязи на расстояние 45 км при проведении работ по ликвидации аварии броненосца у острова Гогланд. В 1901 г. в реальных корабельных условиях им была организована радиосвязь на расстояние до 150 км.

Увеличение дальности связи и повышение ее качества стало возможным благодаря изобретению диода Дж. Флемингом (1904) и триода Ли де Форестом (1907). Эти изобретения положили начало развитию электроники.

Первая в мире радиовещательная станция мощностью 12 кВт была построена в 1922 г. в Москве, позднее — радиостанция РВ-10 в Минске. Радиопередачи на этой радиостанции начались в 1925 г.

Развитие радио стимулировало рождение нового средства передачи информации — телевидения. Первые прототипы телевизионной техники, в которых были реализованы два конкурентных принципа — механический и электронный, появились в 20-х гг. XX в. Механический не выдержал испытания временем, а первые экспериментальные телевизионные передачи с применением электронного способа начались в 1929 г. Через семь лет на Би-би-си в Англии организуется постоянная телевизионная служба. Телевидение в нашей республике развивается с 1955 г. Первая телепередача транслировалась из Минска 1 января 1956 г.

Рождение электронно-вычислительных машин (ЭВМ), связанное с именем Дж. Неймана (1947), оказало существенное влияние на развитие систем передачи информации. ЭВМ и микропроцессоры становятся неотъемлемой частью различных сетей и систем, обеспечивая им требуемые качественные показатели и удобство обслуживания.

Запуск первого искусственного спутника Земли 4 октября 1957 г. открыл новую страницу в развитии теории и техники связи. На околоземные орбиты стали выводиться специальные спутники с аппаратурой, обеспечивающей передачу информации на большие

расстояния (телевизионных программ, многоканальных телефонных сигналов, сигналов передачи данных и т.д.).

Год 1958-й ознаменовался изобретением лазера. После появления первых промышленных образцов лазера (1961) попытки его внедрения в системы связи увенчались успехом для сотрудников лаборатории телекоммуникационных стандартов в Харлоу (Англия). Они предложили для передачи светового сигнала использовать длинные оптические волокна, что послужило началом развития теории и техники волоконно-оптической связи. Применение лазера и направляющей среды — оптического волокна позволило существенно увеличить скорость и достоверность передачи информации, а связь сделать более надежной.

Теория электрической связи — интенсивно развивающаяся область науки, базирующаяся на исследованиях и работах выдающихся ученых. Имена некоторых из них названы выше.

Значительный вклад в современную теорию связи внесли также А.Н. Колмогоров и А.Я. Хинчин (разработали основы математического аппарата), В.А. Котельников (создал теоретические основы цифровых систем передачи информации, разработал теорию потенциальной помехоустойчивости), К.Э. Шеннон (создал основы теории информации). Дальнейшее развитие теория связи получила в работах А.А. Харкевича, В.И. Сифорова, Х. Найквиста, Р. Хартли, Н. Винера, Ф.М. Вудворда, Я.З. Ципкина и других ученых.



ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СВЯЗИ



1.1. Информация, сообщение, сигнал

В данной книге под словом **информация** будем понимать сведения, которые описывают то или иное событие или свойство какого-либо объекта. Когда эти сведения становятся объектом передачи, распределения, преобразования, хранения или непосредственного использования, они могут быть представлены в виде символов (знаков) или в каком-либо другом виде, например в виде фотографии, рисунка, произнесенных слов, выражающих мысль говорящего, и т.д.

Сообщение является формой представления информации. Одно и то же сообщение может быть представлено в различной форме. Например, сведения о вашем приезде можно сообщить по телефону или телеграммой. Сообщение, которое передается телеграммой, кроме информационной части, из которой получателю становится известным день и время приезда, номер поезда и вагона, содержит также сведения, позволяющие доставить это сообщение в нужное время и по указанному адресу. Телефонное сообщение с той же информацией содержит, кроме речи, сведения для установления и разъединения тракта передачи.

Сообщение, передаваемое по сети связи, таким образом, содержит информационную и дополнительную (вспомогательную) часть, позволяющую доставить сообщение.

Различают аналоговые и дискретные сообщения. *Аналоговое сообщение* описывается функцией времени и непрерывным множеством возможных значений. Источник, на выходе которого вырабатывается непрерывное по значениям сообщение, называется

аналоговым. *Дискретное сообщение* также является функцией времени (дискретного или непрерывного) и принимает конечное число возможных значений. Источник, на выходе которого вырабатывается дискретное сообщение, называется дискретным.

Передача сообщений на расстояние осуществляется с помощью какого-либо материального носителя (бумаги, перфоленты, магнитной ленты и т.д.) или физического явления (электрического тока, звукового, электромагнитного поля и т.д.). Физический процесс (*колебания электрического тока или напряжения*, звуковые и электромагнитные волны), один или несколько параметров которого изменяются случайно в соответствии с передаваемым случайным сообщением или детерминированно (по заранее заданному закону), называется **сигналом**. Сигнал при его передаче по каналу связи подвергается различным преобразованиям. Преобразование одного (преобразуемого) сигнала в другой (преобразованный) путем изменения параметров третьего сигнала (переносчика или носителя сообщения) называется **модуляцией**.

Особенностью сигнала переносчика является постоянство его параметров до передачи и их изменение в соответствии с сообщением при передаче. Преобразуемый сигнал называется **модулирующим**, а сигнал-переносчик — **модулируемым**. Поскольку сообщение является случайным по своей природе, т.е. непредсказуемым для получателя, модулирующий и модулированный сигналы являются *случайными*.

Модулирующий сигнал, полученный непосредственным преобразованием сообщения, называется *первичным*. Примером первичного сигнала является электрический ток на выходе микрофона. Преобразованный сигнал на выходе модулятора по отношению к преобразованному первичному сигналу называется *вторичным*.

В системах связи, кроме случайных сигналов, находят применение также неслучайные, или *детерминированные*, сигналы, используемые для настройки, управления либо контроля. Эти сигналы являются физическими процессами с постоянными или с изменяющимися по известному закону параметрами. По этой причине они никакой информации не несут. Однако при прохождении по каналам связи принимаемые сигналы становятся носителями информации. Эту информацию можно извлечь, измеряя отклонения параметров принимаемого сигнала от параметров передаваемого.

Они возникают из-за каких-то нарушений в работе аппаратуры или изменений показателей качества и параметров системы связи.

Параметр сигнала-переносчика, отображающий изменения передаваемого сообщения, называется *представляющим (информационным)*. Для гармонического колебания это амплитуда, фаза и частота.

Сигнал, у которого представляющий параметр описывается функцией непрерывного или дискретного времени и непрерывным множеством возможных значений, называется *аналоговым (непрерывным)*.

Сигнал, у которого представляющий параметр описывается функцией непрерывного времени и конечным множеством возможных значений, называется *дискретным*.

Дискретный сигнал, у которого представляющий параметр описывается функцией дискретного времени и конечным множеством возможных значений, называется *цифровым*. Если возможные значения представлены совокупностью двоичных чисел, то цифровой сигнал называется *двоичным*. Двоичные сигналы являются самыми простыми и по этой причине используются чаще других сигналов. Наряду с двоичными сигналами, в системах связи применяются троичные, четверичные и другие цифровые сигналы.

Сигналы в системах связи являются средством для транспортировки сообщений, а техника связи по существу является техникой транспортирования (передачи) сообщений. **Основными параметрами сигнала** с этой точки зрения являются: длительность сигнала T_c , ширина спектра сигнала F_c , динамический диапазон сигнала D_c .

Длительность сигнала определяет интервал времени, в котором этот сигнал существует. *Ширина спектра* сигнала — это интервал частот, в пределах которого сосредоточена основная часть энергии сигнала.

Динамический диапазон — это отношение наибольшей и наименьшей мгновенных мощностей сигнала. Динамический диапазон обычно выражают в децибелах:

$$D_c = 10 \lg \frac{P_{\max}}{P_{\min}},$$

где $P_{\max}$, $P_{\min}$ — максимальное и минимальное значения мгновенной мощности.

Радиосигнал, у которого ширина спектра относительно невелика, называется *узкополосным*. В противном случае он называется *широкополосным*.

Произведение длительности сигнала на ширину его спектра называется *базой* сигнала. Сигнал, у которого база равна единице, называется *простым*. У *сложного* сигнала база больше единицы. *Энергия* сигнала, определенного функцией времени $u(t)$, равна

$$E = \int_0^{T_c} u^2(t) dt.$$

Средняя мощность сигнала

$$P = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} u^2(t) dt = \frac{E}{T_c}.$$

Обобщающей характеристикой является *объем* сигнала, равный произведению его длительности, ширины спектра и динамического диапазона:

$$V_c = T_c F_c D_c.$$

Объем сигнала — важная характеристика. Чем больше объем, тем труднее передавать его по каналу.



1.2. Связь, сеть связи, система связи

Под термином **связь** будем понимать обмен информацией (ее передачу и прием) в соответствии с согласованными правилами, а под термином **электросвязь** — такую связь, при которой обмен информацией осуществляется электрическими, оптическими и радиосигналами с помощью средств электросвязи. В дальнейшем вместо слова «электросвязь» будем использовать слово «связь».

Связь классифицируется по видам в зависимости от характера передаваемых сообщений или среды распространения сигналов (рис. 1.1).

Совокупность узлов и трактов, позволяющая соединять два и более определенных пункта для обеспечения связи между ними,

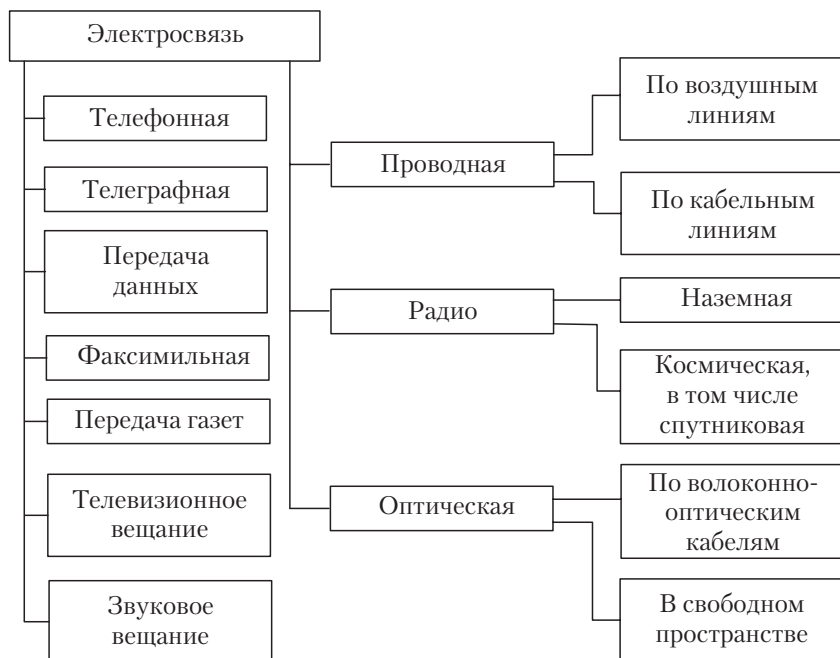


Рис. 1.1. Виды связи

называется **сетью связи**. Здесь под *пунктами* следует понимать источники и получатели (потребители) сообщений, а под *трактом* — непрерывный путь связи между двумя пунктами. *Узел* — это промежуточный пункт на сети, в котором возможно соединение нужных входов и выходов.

Система, посредством которой источник может достаточно эффективно и надежно передавать информацию в пункт назначения, называется **системой связи**. Система связи, таким образом, является подсистемой сети связи. Сети связи и системы связи образуют средства электросвязи. Обобщенная структурная схема системы связи приведена на рис. 1.2.

В состав системы связи входит передатчик, среда распространения, приемник, а также источник и получатель сообщения. Иногда из состава системы источник и получатель сообщения исключаются.

Передатчик является устройством, которое преобразует сообщение в сигнал. Вначале сообщение преобразуется в первичный

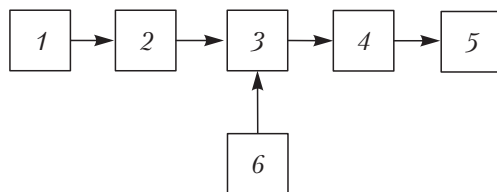


Рис. 1.2. Обобщенная структурная схема системы связи:
1 — источник сообщения; 2 — передатчик; 3 — линия связи; 4 — приемник;
5 — получатель сообщения; 6 — источник помех

сигнал. Если первичный сигнал можно передать через линию связи, включающую соответствующее оборудование и среду распространения, то он без каких-либо дополнительных преобразований поступает к приемнику. Часто такая передача оказывается невозможной, и тогда первичный сигнал посредством модуляции или кодирования преобразуется в сигнал, параметры которого оказываются согласованными с линией связи.

Среда распространения — это физическая цепь, которая содержит одну или несколько пар токопроводящих металлических проводов или светопроводящих стеклянных волокон. В качестве среды распространения используется также открытое пространство. Соответственно, системы связи называются *проводными*, *оптическими* или *радио*.

Приемник является устройством, с помощью которого осуществляется восстановление сообщения по принятому сигналу. Преобразования, выполняемые в приемнике, обратны преобразованиям в передатчике. Это позволяет сохранить информацию, содержащуюся в сообщении при ее передаче. Сигналы на входе приемника отличаются от переданных из-за искажений и помех, что является причиной воспроизведения сообщения с некоторой погрешностью (ошибкой). Искажения возникают из-за несовершенства аппаратуры связи и отклонений характеристик каналов связи. Эти искажения в принципе могут быть устранены соответствующим конструированием аппаратуры связи и коррекцией характеристик каналов. Помехи заранее неизвестны, поэтому их влияние полностью устранить невозможно.

Действующие в каналах связи **помехи** делятся на внешние и внутренние. К *внешним* относятся космические, атмосферные,

промышленные помехи, а также от посторонних радиопередатчиков. *Внутренние* помехи возникают в самой аппаратуре систем связи. Они обусловлены хаотическим движением носителей заряда в резисторах, электронных и других приборах, взаимным влиянием друг на друга каналов в многоканальных системах связи.

Системы связи классифицируются по нескольким признакам.

Вид передаваемых сообщений определяет название системы связи. Система, используемая для передачи аналоговых сообщений, называется *аналоговой*, а система, используемая для передачи дискретных сообщений, — *дискретной* или *цифровой*. Применяются также *смешанные системы*, в которых непрерывные сообщения преобразуются в дискретные с целью использования цифровых методов передачи.

Системы связи классифицируют и по назначению. Так, система, используемая для передачи телефонных сообщений, называется *телефонной*, для передачи телевизионных сообщений — *телевизионной*. Выделяют также системы: *телеграфную*, *фототелеграфную*, *телеметрическую*, *систему телеуправления*, *систему передачи данных* и т.д.

В соответствии с режимом использования выделяют системы связи *симплексную* и *дуплексную*. Система связи называется *многоканальной*, если она обеспечивает передачу нескольких сообщений по одной общей среде распространения.

Система связи называется *автоматизированной*, если она обеспечивает связь в основном автоматическими устройствами.

Понятие **канал связи** поясним с использованием структурной схемы цифровой системы связи (рис. 1.3). В данной системе, кроме пути прохождения сигнала от входа (точка A) до выхода (точка A^*), могут быть выделены также другие отрезки пути: от точки A до точки D^* , от точки B до точки B^* и т.д.

Технические средства и среда распространения, соответствующие отрезкам пути прохождения сигнала, являются каналами связи. В зависимости от характера сигналов на входе и выходе каналы могут быть:

- ☐ дискретными;
- ☐ дискретно-непрерывными;
- ☐ непрерывно-дискретными;
- ☐ непрерывными.

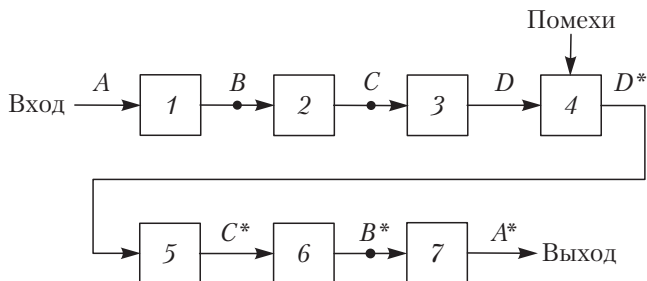


Рис. 1.3. Структурная схема цифровой системы передачи:

1 — кодер источника (блок эффективного кодирования); 2 — кодер канала (блок помехоустойчивого кодирования); 3 — модулятор; 4 — линия связи; 5 — демодулятор; 6 — декодер канала (блок помехоустойчивого декодирования); 7 — декодер источника (блок эффективного декодирования)

Дискретные каналы на рис. 1.3 обеспечивают прохождение сигналов по путям A , A^* и B , B^* . Сигналы на входах и выходах этих каналов дискретные. Дискретно-непрерывным является канал, соответствующий отрезку пути между точками A и D^* . Сигнал на входе этого канала дискретный, а на выходе — непрерывный.

В зависимости от вида сообщения каналы связи делятся:

- ☐ на телефонные;
- ☐ телевизионные;
- ☐ телеграфные;
- ☐ звукового вещания;
- ☐ передачи данных и др.

В зависимости от передачи сигнала по направляющим линиям или в свободном пространстве каналы называются каналами связи или радиоканалами. К каналам связи относятся проводные (воздушные и кабельные) каналы, работающие на частотах до тысяч килогерц, а также волоконно-оптические, работающие в оптическом диапазоне волн ($10^{13} \dots 10^{15}$ Гц). К радиоканалам относятся каналы связи, работающие в диапазонах волн от сверхдлинных (3 кГц) до децимиллиметровых (3000 ГГц).

Каналы связи характеризуются тремя **параметрами**: временем передачи T_k , шириной полосы пропускания F_k и динамическим диапазоном D_k .

Время передачи T_k — это время, в течение которого ведется передача информации.

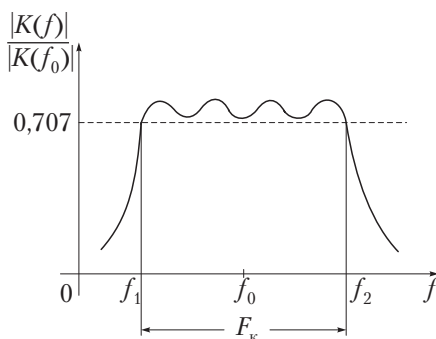


Рис. 1.4. Нормированная амплитудно-частотная характеристика канала

Ширина полосы пропускания канала F_K — это диапазон частот, в пределах которого значение нормированной амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) канала больше заданного уровня, равного, например, 0,707 (рис. 1.4).

Динамический диапазон D_K определяется отношением допустимой максимальной мощности $P_{\max}$ передаваемого сигнала к мощности помехи P_{Π} , присутствующей в канале:

$$D_K = 10 \lg(P_{\max}/P_{\Pi}).$$

Обобщающей характеристикой канала связи является его *объем*

$$V_K = T_K F_K D_K.$$

Для неискаженной передачи сигнала по каналу связи необходимо, чтобы объем сигнала не превосходил объем канала. Это условие называют *условием согласования сигнала с каналом* и записывают в виде

$$V_c \leq V_K.$$

На практике передаваемый сигнал согласован с каналом по всем трем параметрам: T_c , F_c , D_c .



1.3. Кодирование и модуляция

Кодированием и модуляцией достигается согласование источника сообщений с каналом связи.

Рассмотрим источник дискретного сообщения. Пусть сообщение выражено при помощи некоторых символов, например букв печатного текста. Если далее эти буквы преобразуются в другие символы или последовательности из них по заранее установленному и известному при передаче и приеме правилу, причем преобразование является взаимно однозначным, то говорят, что сообщение дискретного источника кодируется.

Набор символов (букв), который определяет последовательность символов на выходе дискретного источника, называется **алфавитом**. Число символов в алфавите называется **объемом алфавита**. Последовательность символов на выходе источника называется *кодовой последовательностью*.

Пример 1.1. Для набора (алфавита) букв a_1, a_2, a_3, a_4 объем равен 4. Определим правило, по которому каждой букве $a_i, i = 1, 2, 3, 4$, будет соответствовать последовательность над алфавитом объемом 2. Символы этого алфавита — 0 и 1. Такой алфавит называется двоичным. Пусть это правило следующее:

a_1	00
a_2	01
a_3	10
a_4	11

В этом случае, например, дискретной последовательности a_1, a_3, a_4 соответствует кодовая последовательность 001011.

Отрезок кодовой последовательности (комбинации) называется **блоком**. Число символов (элементов) в блоке называется *значностью* или *длиной* блока.

Блок, выделенный по определенному признаку и рассматриваемый как одно целое, называется **словом**. Словом, например, является кодовая последовательность (комбинация). Совокупность (множество) всех кодовых комбинаций, возможных при заданном правиле кодирования, образует **код**.

Кодирование источника непрерывных сообщений не отличается от кодирования дискретного, если непрерывное сообщение преобразуется в дискретное. Это преобразование включает дискретизацию, при которой непрерывное во времени сообщение преобразуется в последовательность отсчетов. Далее каждый отсчет сравнивается с заранее заданными уровнями квантования. Ближайший к отсчету уровень переводится в число. Набору квантованных уровней соответствует набор символов (букв), а объем алфавита равен числу квантованных уровней.

Кодовая последовательность $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1, b_0$, содержащая разряды числа, начиная со старшего, определяет число M в системе счисления с основанием m :

$$M = b_{n-1}m^{n-1} + b_{n-2}m^{n-2} + \dots + b_1m^1 + b_0m^0.$$

Коэффициенты $b_i, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, принимают значения от 0 до $(n-1)$ и образуют кодовый алфавит. Число кодовых комбинаций равно m^n .

В современных системах связи широко применяется *двоичная система счисления* с основанием $m = 2$. Коэффициенты b_i принимают значения 0 и 1 и могут передаваться отрезками колебаний различных частот, отрезками колебаний с отличающимися начальными фазами или постоянным током с разной амплитудой или полярностью. Это обеспечивает простоту аппаратуры.

Блоки системы связи, в которых осуществляется кодирование, называются **кодерами**.

Коды, у которых все кодовые комбинации имеют одинаковую длину, называются *равномерными*. *Неравномерные* коды содержат кодовые комбинации неравной длины.

Одной из задач кодирования является задача согласования алфавита, из которого построены дискретные сообщения, с кодовым алфавитом выходных комбинаций. Кодирование позволяет решить также задачу устранения избыточности источника сообщения и тем самым повысить скорость передаваемой информации. Примерами кодов, решающими эту задачу (задачу эффективного кодирования), являются коды Шеннона—Фано и Хафмена. Эти коды являются неравномерными. Для повышения достоверности передачи дискретной информации применяют *помехоустойчивые коды*. В отличие от простых кодов, у которых все возможные кодовые комбинации

используются для передачи информации, помехоустойчивые коды строятся так, что для передачи используется лишь часть от общего числа возможных комбинаций. Благодаря этому появляется возможность обнаруживать и исправлять ошибки. При обнаружении и исправлении ошибок наряду с информационными символами по каналу связи передают проверочные символы.

В системах связи применяется дискретная и непрерывная модуляция. Под *дискретной модуляцией* понимают такой процесс формирования модулированного сигнала, когда символам кодовой комбинации или набору символов (блоку) ставятся в однозначное соответствие заранее выбранные сигналы. Примерами таких сигналов являются, например, импульсы постоянного тока заданной длительности и амплитуды или импульсы переменного тока заданной амплитуды и длительности с отличающейся частотой.

Непрерывная модуляция — это процесс преобразования непрерывного во времени аналогового сигнала в другой непрерывный сигнал путем изменения параметров третьего сигнала (носителя или переносчика сообщения) в соответствии с преобразуемым сигналом.

Устройства, с помощью которых осуществляется модуляция, называются **модуляторами**.

Используются следующие носители сообщения: постоянный ток, переменный ток (гармоническое колебание), периодическая последовательность импульсов, шумоподобный сигнал (ШС). К *шумоподобным сигналам* относятся такие детерминированные сигналы, вид автокорреляционных функций которых мало отличается от вида автокорреляционной функции флуктуационного шума.

В системах связи применяют от одной до нескольких ступеней модуляции.

Модуляцией первичным непрерывным сигналом одного из параметров гармонического сигнала получают:

- ☐ амплитудную модуляцию (АМ);
- ☐ частотную модуляцию (ЧМ);
- ☐ фазовую модуляцию (ФМ).

Воздействуя первичным непрерывным сигналом на один из параметров периодической последовательности видеоимпульсов, получают:

- ☐ амплитудно-импульсную модуляцию (АИМ);
- ☐ широтно-импульсную модуляцию (ШИМ);

- фазо-импульсную модуляцию (ФИМ);
- частотно-импульсную модуляцию (ЧИМ).

Изменением амплитуды или направления постоянного тока в соответствии со следованием символов 0, 1 информационной кодовой последовательности получают двоичные первичные сигналы, построенные из однополярных или разнополярных импульсов одинаковой длительности.

Модулируя один из параметров гармонического сигнала (амплитуду, фазу, частоту) двоичными первичными сигналами, сформированными во времени в соответствии со следованием символов информационной кодовой последовательности, можно получить:

- двоичный амплитудно-модулированный (АМ) сигнал;
- двоичный частотно-модулированный (ЧМ) сигнал;
- двоичный фазо-модулированный (ФМ) сигнал и т.д.

Разновидностью двоичного ФМ сигнала является сигнал с относительной фазовой модуляцией (ОФМ).



1.4. Демодуляция и декодирование

Демодуляция в системах связи — это процесс преобразования модулированного сигнала (обычно прошедшего канал и искаженного помехами) в модулирующий сигнал. Восстановление дискретного сообщения по выходному сигналу демодулятора, осуществляемое с учетом правил кодирования, называется **декодированием**. Устройства, с помощью которых производится демодуляция, называются **демодуляторами**. Устройства, с помощью которых ведется декодирование, называются **декодерами**.

Прием сигналов ведется на фоне помех. Они ухудшают качество восстановленного приемником сообщения. Чтобы свести к минимуму влияние помех, смесь сигнала и помех, поступающая на вход приемника, подвергается определенным преобразованиям, которые называют **обработкой сигнала**. Структура приемника, обеспечивающая наилучшее преобразование (с точки зрения заранее сформулированного критерия оптимальности), называется **оптимальной структурой**, а приемник — **оптимальным приемником**.

Характер оптимальной обработки зависит от свойств сигнала и помех, свойств канала, методов модуляции и кодирования, а также от критерия оптимальности.

При оптимальной обработке приемник обеспечивает наибольшую помехоустойчивость. Под **помехоустойчивостью** понимают способность системы связи противостоять вредному влиянию помех на передаваемое сообщение.

Демодуляция относится к числу основных операций, совершаемых приемником. На выходе аналогового демодулятора присутствует колебание, с некоторой погрешностью повторяющее модулирующий сигнал. Это колебание при последующей обработке преобразуется в сообщение.

В цифровых системах связи восстановление сообщения осуществляется чаще всего в два этапа. На первом этапе сигнал демодулируется и на выходе демодулятора выделяется кодовая комбинация. Если решение о каждом элементе кодовой комбинации принимается в результате анализа смеси сигнала и шума только в течение длительности этого элемента и без учета результатов анализа предыдущих элементов, то такой способ обработки называется **поэлементным (посимвольным) приемом**.

Возможен также и другой способ приема — **прием в целом**, когда смесь сигнала и шума, соответствующая передаваемому двоичному слову блока, анализируется целиком. В отличие от поэлементного приема, на выходе приемника реализуется оценка не одного информационного символа, а оценка слова блока, содержащего несколько символов. Это позволяет реализовать более высокую помехоустойчивость по сравнению с посимвольным приемом. К сожалению, приемник, в котором используется прием в целом, оказывается во много раз сложнее приемника с поэлементным приемом. На втором этапе оценка слова блока декодируется.



1.5. Основные характеристики систем связи

Система связи характеризуется совокупностью параметров. Те из них, которые связаны с качеством системы монотонной зависимостью, называются **показателями качества системы**. Чем больше (меньше) значение показателя качества, тем лучше (хуже) при прочих равных условиях система.

При проектировании системы принимают во внимание большое количество показателей качества и параметров в соответствии

с заранее обоснованным критерием оптимальности. Наилучшей (оптимальной) считается такая система, которой соответствует наибольшее (наименьшее) значение некоторой целевой функции от показателей качества. Показатели качества и параметры систем связи условно делятся:

- на информационные (помехоустойчивость, скорость, пропускная способность и задержка передачи информации);
- технико-экономические (стоимость, габаритные размеры, масса);
- технико-эксплуатационные показатели (среднее время безотказной работы, температурный диапазон работы и т.д.).

Выделим показатели, характеризующие систему связи с точки зрения передачи информации.

Помехоустойчивость является одним из основных показателей качества системы связи. Помехоустойчивость при заданной помехе характеризуется **верностью передачи** — степенью соответствия принятого сообщения переданному сообщению. При передаче непрерывных сообщений мерой верности служит *среднеквадратичное отклонение между принятым $a^*(t)$ и переданным $a(t)$ сообщениями*:

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{T} \int_0^T [a^*(t) - a(t)]^2 dt,$$

где T — время, в течение которого принимается сообщение.

Первичный сигнал $b(t)$ связан с сообщением $a(t)$ линейной зависимостью, т.е.

$$b(t) = ka(t),$$

где k — коэффициент преобразования.

Для простоты будем считать, что $k = 1$. С учетом этого формула для среднеквадратичного отклонения примет вид

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{T} \int_0^T [b^*(t) - b(t)]^2 dt,$$

где звездочкой обозначена оценка сигнала, которая отличается от этого сигнала на величину погрешности.

Чем меньше среднеквадратичное отклонение, тем выше помехоустойчивость.

Мерой верности может быть также *вероятность того, что погрешность ε не превзойдет заранее заданную величину ε_0* :

$$P(|\varepsilon| \leq \varepsilon_0).$$

Чем больше эта вероятность, тем выше помехоустойчивость.

Мерой верности передачи дискретных сообщений является *вероятность ошибки*. Чем меньше эта вероятность, тем больше помехоустойчивость.

Максимальная помехоустойчивость, возможная для заданных условий передачи, называется *потенциальной помехоустойчивостью*.

Другой важный показатель качества системы связи — ее **пропускная способность**, т.е. максимальная скорость передачи $R_{\max}$, допускаемая данной системой. Она определяется числом N каналов этой системы и пропускной способностью C канала связи:

$$R_{\max} = NC.$$

Для дискретного канала связи без помех

$$C = \frac{1}{T} \log m^1),$$

где T — длительность передачи одного символа; m — объем алфавита.

Для непрерывного канала связи

$$C = F \log(1 + P_c/P_{\text{ш}}),$$

где F — ширина полосы канала; P_c — мощность сигнала; $P_{\text{ш}}$ — мощность шума.

Скорость передачи (так же как и пропускная способность) измеряется в битах в секунду.

Задержка передачи — это время от момента начала передачи сообщения в передатчике до момента выдачи восстановленного сообщения на выходе приемника. Она зависит от протяженности

¹⁾ Здесь и далее запись вида $\log x$ обозначает операцию двоичного логарифмирования $\log_2 x$.

канала связи и длительности преобразований сигнала в передатчике и приемнике. Задержка передачи является одним из важнейших показателей качества системы связи.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под сообщением и сигналом?
2. Какие основные блоки входят в систему связи?
3. В чем различие между системой и каналом связи?
4. В чем различие и единство процессов кодирования и модуляции?
5. Какие процессы при декодировании и демодуляции вы знаете?
6. Что понимают под оптимальным приемником?
7. Чем отличается поэлементный прием от приема в целом?
8. Какие характеристики систем связи известны?
9. Что понимают под сетью связи?



ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

2.1. Разложение детерминированных функций в ортогональные ряды

Детерминированными называются функции, которые точно определены в любой момент времени. Как показано ранее, сигналы при передаче информации являются случайными процессами, поэтому детерминированные функции не могут быть их математическими моделями. Однако изучение детерминированных функций полезно по ряду причин:

- результаты анализа (функционального, спектрального и т.д.) детерминированных функций являются базовыми при изучении случайных функций;

- случайные процессы в ряде случаев могут быть представлены математическими моделями, которые строятся с использованием множества случайных чисел и детерминированных функций (каноническое разложение случайных функций). Это позволяет существенно упростить решение некоторых задач (вычисление корреляционных функций, определение интегралов от случайных функций), так как операции над случайными функциями заменяются операциями над случайными числами и детерминированными функциями;

- применение детерминированных функций оказывается полезным также при решении задач анализа линейных и нелиней-

ных узлов, блоков и систем, при оценке искажений сигналов, возникающих при передаче их по каналам связи и т.д.;

□ детерминированные сигналы имеют и самостоятельное значение. Они специально создаются для целей измерения, наладки и регулирования систем связи и используются в качестве эталонов.

Детерминированный сигнал выражается функцией времени $u(t)$. Примером математического выражения *гармонического сигнала* с постоянными параметрами (амплитудой, частотой и начальной фазой) является функция косинуса:

$$u(t) = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (2.1)$$

При известных параметрах эта функция однозначно определена для любого момента времени и является относительно простой.

Совокупность подобных функций удобно использовать для описания более сложных детерминированных и случайных сигналов. Такие функции называются *базисными*. Математическое выражение некоторого сигнала $u(t)$ в этом случае можно представить суммой произведений коэффициентов α_k на базисные функции $\varphi_k(t)$:

$$u(t) = \sum_k \alpha_k \varphi_k(t). \quad (2.2)$$

Коэффициенты и базисные функции могут быть действительными или комплексными, а пределы суммы равны соответственно $-\infty$ и ∞ .

Разложение (2.2) справедливо для заданного конечного интервала времени. Условно этот интервал обозначается квадратными скобками с указанием начального и конечного значений времени: $[t_1, t_2]$.

При выбранном наборе базисных функций, или *базисе*, сигнал (2.2) полностью определяется совокупностью коэффициентов α_k . Такая совокупность называется **дискретным спектром сигнала**. Базисные функции выбираются так, чтобы они имели простое аналитическое выражение, обеспечивали быструю сходимость ряда, позволяли легко вычислять коэффициенты α_k . Вычисление коэффициентов существенно облегчается, если в качестве базисных выбрать ортогональные функции. Систему комплексных функций $\varphi_k(t)$, $\varphi_l(t)$ называют *ортогональной на отрезке времени* $[t_1, t_2]$, если

для всех значений $k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$ и $l = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$ (за исключением случая $k = l$) выполняется условие

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_k(t) \varphi_l^*(t) dt = 0, \quad k \neq l, \quad (2.3)$$

где $\varphi_l^*(t)$ — комплексно сопряженная функция.

Система комплексных функций называется *нормированной*, если

$$\int_{t_1}^{t_2} |\varphi_l(t)|^2 dt = 1, \quad l = 0, \mp 1, \mp 2, \dots \quad (2.4)$$

Базисные функции, удовлетворяющие условиям (2.3) и (2.4), называются **ортонормированными**.

Умножим левую и правую части выражения (2.2) на $\varphi_l^*(t)$ и результат проинтегрируем:

$$\int_{t_1}^{t_2} u(t) \varphi_l^*(t) dt = \sum_k \alpha_k \int_{t_1}^{t_2} \varphi_k(t) \varphi_l^*(t) dt.$$

Учитывая выражения (2.3) и (2.4), получим

$$\alpha_l = \int_{t_1}^{t_2} u(t) \varphi_l^*(t) dt, \quad l = k.$$

Коэффициенты α_k называют *обобщенными коэффициентами Фурье*, а ряд (2.2) — *обобщенным рядом Фурье*.

Если выбраны экспоненциальные базисные функции

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{jk\omega_1 t}, \quad k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots,$$

то выражение (2.2) можно записать в виде

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t}, \quad (2.5)$$

где $T = t_2 - t_1$ — интервал разложения сигнала; $\omega_1 = 2\pi/T$;

$$\alpha_k(jk\omega_1) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-jk\omega_1 t} dt.$$

Значения времени можно задать так: $t_1 = -T/2$, $t_2 = T/2$ или $t_1 = 0$, $t_2 = T$.

Соотношение (2.5) приведем к виду

$$u(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha_k(jk\omega_1)}{\sqrt{T}} e^{jk\omega_1 t} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t}, \quad (2.6)$$

где

$$\alpha(jk\omega_1) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (2.7)$$

Выражение (2.6) известно как *ряд Фурье, записанный в комплексной форме*. Формула (2.7) определяет дискретный спектр сигнала в базисе экспоненциальных функций.

От двустороннего спектрального представления можно перейти к не имеющему отрицательных частот спектру и получить ряд Фурье в тригонометрической форме.

Преобразуем выражение (2.7), применив формулу

$$e^{-jk\omega_1 t} = \cos k\omega_1 t - j \sin k\omega_1 t.$$

Получим

$$\begin{aligned} \alpha(jk\omega_1) &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \cos k\omega_1 t dt - \\ &- \frac{2}{T} j \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \sin k\omega_1 t dt = a_k - jb_k, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \cos k\omega_1 t dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \sin k\omega_1 t dt.$$

Для чисел k , равных по величине, но разных по знаку, справедливости равенства

$$a_k = a_{-k}, \quad b_k = -b_{-k},$$

так как $\cos(k\omega_1 t) = \cos(-k\omega_1 t)$, $\sin(k\omega_1 t) = -\sin(-k\omega_1 t)$.

Модуль дискретного спектра сигнала характеризует *спектр амплитуд* этого сигнала:

$$|\alpha(jk\omega_1)| = \alpha(k\omega_1) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}. \quad (2.9)$$

Спектр фаз определяется выражением

$$\varphi(k\omega_1) = -\arctg(b_k/a_k). \quad (2.10)$$

Подставим выражение (2.8) в (2.6). В результате получим *ряд Фурье в тригонометрической форме*:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_1 t} - \frac{1}{2} j \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_1 t} = \\ &= \frac{a_0 - jb_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2j} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k\omega_1) \cos[k\omega_1 t + \varphi(k\omega_1)], \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $a_k = \alpha(k\omega_1) \cos \varphi(k\omega_1)$; $b_k = -\alpha(k\omega_1) \sin \varphi(k\omega_1)$.

Функции, определяющие ряд Фурье (2.11), являются известной ортонормированной системой:

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad \varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi t}{T}, \quad \varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi t}{T}, \quad \dots,$$

$$\varphi_{2k-1}(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi kt}{T}, \quad \varphi_{2k}(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi kt}{T}, \quad \dots$$

Возможно также представление сигналов по системам базисных функций: $(\sin x)/x$, Уолша, Хаара, Чебышева, Лаггера, Лежандра и др. Это означает, что для любого сигнала можно найти столько разных спектров, сколько может быть найдено разных систем базисных функций.

Пример 2.1. Вычислить коэффициенты ряда Фурье для импульса, приведенного на рис. 2.1. Интервал разложения $[-T/2, T/2]$.

Решение. Постоянная составляющая

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau_n}{2}}^{\frac{\tau_n}{2}} A dt = \frac{A\tau_n}{T}.$$

Коэффициенты: $b_k = 0$,

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau_n}{2}}^{\frac{\tau_n}{2}} A \cos k\omega_1 t dt = \frac{2A}{k\omega_1 T} \int_{-\frac{k\omega_1 \tau_n}{2}}^{\frac{k\omega_1 \tau_n}{2}} \cos x dx = \frac{2A\tau_n \sin \frac{k\omega_1 \tau_n}{2}}{T \frac{k\omega_1 \tau_n}{2}}.$$

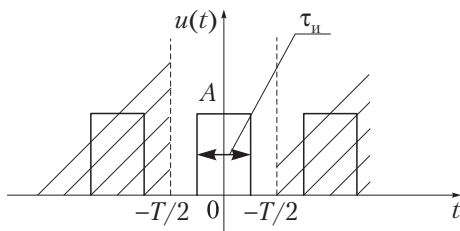


Рис. 2.1. Последовательность прямоугольных импульсов

При вычислении интеграла произведена замена переменной

$$k\omega_1 t = x, \quad dt = \frac{dx}{k\omega_1}.$$

Подставляя вычисленные значения для коэффициентов ряда Фурье в формулу (2.11), получим

$$u(t) = A \frac{\tau_n}{T} + \frac{2A\tau_n}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\omega_1 \tau_n}{2}}{\frac{k\omega_1 \tau_n}{2}} \cos k\omega_1 t. \quad (2.12)$$

На рис. 2.2 приведен график спектра амплитуд, построенный по результатам вычислений. Спектр дискретный, т.е. существует только для дискретных значений частот, соответствующих числам $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. В промежутках между этими значениями спектр равен нулю. Число спектральных составляющих в интервале $[0; 2\pi/\tau_n]$ равно

$$\frac{2\pi}{\tau_n} : \frac{2\pi}{T} = \frac{T}{\tau_n}.$$

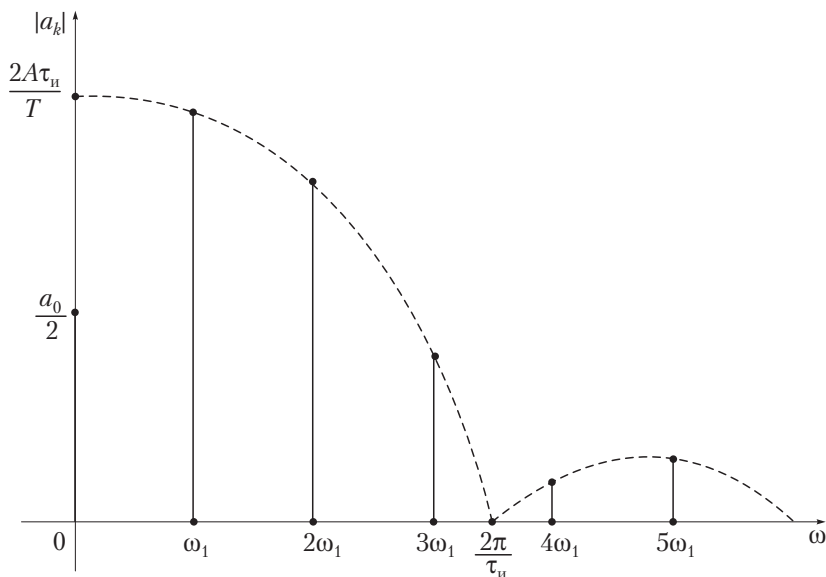


Рис. 2.2. График спектра амплитуд

Отношение периода повторения импульсов к длительности импульса называется **скважностью**.

Периодической называют такую функцию, которая удовлетворяет уравнению

$$u(t) = u(t + mT).$$

Ряд Фурье (2.6) в комплексной форме запишем для периодической функции времени:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(jk\omega_1) e^{jk\omega_1(t+mT)} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t}.$$

Здесь числа k, m являются целыми, $\omega_1 T = 2\pi$. Поэтому $e^{jm k \omega_1 T} = 1$ и разложение функции в интервале $[-T/2; T/2]$ совпадает с разложением этой же функции в других интервалах: $[T/2; 3T/2]$, $[-T/2; -3T/2]$ и т.д. Другими словами, в ряд Фурье раскладываются периодические функции времени.



2.2. Спектральная плотность сигнала

Пусть интервал разложения сигнала (см. рис. 2.1) стремится к бесконечности. При его увеличении частота $\omega_1 = 2\pi/T$ уменьшается до бесконечно малой величины:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \omega_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} = d\omega.$$

Расстояние между спектральными компонентами при этом уменьшается до бесконечно малой величины, а значения $k\omega_1$ превращаются в текущие значения частоты ω (см. рис. 2.2). Интервал разложения стремится к бесконечной величине. Это позволяет при вычислении предела ряда Фурье в комплексной форме заменить знак суммы знаком интеграла, основную частоту $\omega_1 = 2\pi/T$ — на $d\omega$, а кратную частоту $k\omega_1$ заменить текущей частотой ω :

$$\begin{aligned} u(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2\pi}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \right] e^{jk\omega_1 t} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Интеграл, который записан в скобках выражения (2.13), обозначим

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.14)$$

Тогда выражение (2.13) запишется более компактно:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.15)$$

Выражения (2.14) и (2.15) называются соответственно *прямым* и *обратным преобразованиями Фурье*. Функция $S(j\omega)$ называется

спектральной плотностью. Она является комплексной и имеет размерность [В/Гц], если размерность сигнала $u(t)$ [В].

Преобразование Фурье (2.14) может быть вычислено на основе общих правил интегрирования, если сигнал удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt < \infty.$$

Это условие означает, что преобразование (2.14) существует для тех сигналов, площадь под кривой $|u(t)|$ которых ограничена.

К этому классу не относятся, например, периодические сигналы, которые не удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости. Однако это не означает, что для периодических сигналов спектральная плотность не может быть вычислена. Методы вычислений, специально разработанные для этих целей, используют так называемые обобщенные функции. Примером обобщенной функции является дельта-функция. Некоторые свойства дельта-функции приведены в приложении 1.

Преобразуем спектральную плотность сигналов, которые удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости. Такие сигналы ограничены во времени.

С учетом формулы Эйлера перепишем выражение (2.14):

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)[\cos\omega t - j\sin\omega t]dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\cos\omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\sin\omega t dt = \\ &= A(\omega) - jB(\omega) = |S(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}, \end{aligned}$$

где

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cos\omega t dt; \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \sin\omega t dt;$$

$$|S(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}; \quad \varphi\{\omega\} = -\arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)}.$$

Модуль $|S(j\omega)|$ называется **спектральной плотностью амплитуд сигнала** или **амплитудно-частотной характеристикой** (АЧХ) спектральной плотности сигнала. Функция $\varphi(\omega)$ определяет фазо-частотную характеристику (ФЧХ) спектральной плотности сигнала. АЧХ и ФЧХ спектральной плотности являются непрерывными функциями частоты.

Перейдем к анализу спектральной плотности сигналов, не удовлетворяющих условию абсолютной интегрируемости. Такие сигналы не ограничены во времени и имеют бесконечно большую энергию.

На основе сигнала $u_0(t)$, удовлетворяющего условию абсолютной интегрируемости, построим периодически повторяющийся сигнал

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} u_0(t - kT)$$

и вычислим его спектральную плотность:

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t - kT) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{-j\omega kT} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) e^{-j\omega x} dx = \\ &= S_0(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{-j\omega kT}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $x = t - kT$; $S_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) e^{-j\omega x} dx$.

Размерность спектральной плотности периодически повторяющегося сигнала определяется размерностью спектральной плотности непериодического сигнала, из которого формируется периодически повторяющийся сигнал, т.е. [В/Гц].

Первый множитель полученного выражения в равенстве (2.16) определяет спектральную плотность ограниченного во времени сигнала $u_0(t)$, второй — спектральную плотность периодически повторяющейся дельта-функции

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(t - kT).$$

Убедимся в этом, вычислив указанную плотность:

$$S_{\varphi}(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT}.$$

При вычислении интеграла использовано фильтрующее свойство дельта-функции (см. приложение 1).

Если периодически повторяющуюся дельта-функцию разложить в ряд Фурье в комплексной форме, то ее спектральную плотность можно выразить иначе:

$$S_{\varphi}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - k\omega_1)t} dt = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(\omega - k\omega_1),$$

где

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \alpha(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{jk\omega_1 t};$$

$$\alpha(jk\omega_1) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{2}{T}.$$

При выводе последней формулы использовано выражение дельта-функции в частотной области. Приравнявая выражения спектральных плотностей, получим

$$S_{\varphi}(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(\omega - k\omega_1).$$

Эта функция равна нулю, если $\omega \neq k\omega_1$, и равна ∞ , если $\omega = k\omega_1$.

Подставим в (2.16) новое выражение $S_{\varphi}(j\omega)$:

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= S_0(j\omega) \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(\omega - k\omega_1) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} S_0(jk\omega_1) \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k\omega_1). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Спектральная плотность периодически повторяющегося сигнала определяется значениями спектральной плотности ограниченного во времени сигнала $u_0(t)$, отсчитанными через интервал, равный $\omega_1 = 2\pi/T$.

Вычислим значение спектральной плотности ограниченного отрезком времени T сигнала:

$$S_0(jk\omega_1) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t)e^{-jk\omega_1 t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} u_0(t)e^{-jk\omega_1 t} dt.$$

Умножим левую и правую части равенства на коэффициент $2/T$:

$$\frac{2}{T} S_0(jk\omega_1) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_0(t)e^{-jk\omega_1 t} dt = \alpha(jk\omega_1),$$

где $\alpha(jk\omega_1)$ — спектр ограниченного во времени сигнала в базисе экспоненциальных функций.

С учетом последней формулы спектральную плотность периодически повторяющегося сигнала запишем в виде

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{T}{2} \alpha(jk\omega_1) \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k\omega_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \alpha(jk\omega_1) \delta(\omega - k\omega_1) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \alpha(k\omega_1) e^{j\varphi(k\omega_1)} \delta(\omega - k\omega_1), \end{aligned}$$

где модуль спектра определяется в базисе экспоненциальных функций формулой (2.9), а спектр фаз — формулой (2.10).

Значения АЧХ и ФЧХ спектральной плотности ограниченного во времени сигнала $u_0(t)$, отсчитанные через интервал $\omega_1 = 2\pi/T$ в точках частотной оси $k\omega_1$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, определяют АЧХ и ФЧХ спектральной плотности этого периодического сигнала.

Рассмотрим некоторые свойства спектральной плотности сигнала, удовлетворяющие условию абсолютной интегрируемости.

1. Спектральная плотность (2.14) — это комплексная и непрерывная функция частоты ω , определенная в бесконечном интервале частот.

2. АЧХ и ФЧХ спектральной плотности удовлетворяют уравнениям

$$|S(j\omega_k)| = |S(-j\omega_k)|, \quad \varphi(-\omega_k) = -\varphi(\omega_k),$$

где $\mp\omega_k$ — выбранные значения частот.

3. Преобразования Фурье (2.14), (2.15) являются линейными преобразованиями. Поэтому спектральная плотность суммы сиг-

налов равна сумме спектральных плотностей этих сигналов, а сумма сигналов определяется обратным преобразованием Фурье от суммы их спектральных плотностей:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N u_i(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} u_i(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{i=1}^N S_i(j\omega);$$

$$u(t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_i(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N S_i(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

где $u_i(t)$ — i -й сигнал; $S_i(j\omega)$ — спектральная плотность i -го сигнала.

4. Спектральная плотность сигнала, ограниченная бесконечно малыми интервалами $2\pi\Delta f$ (рис. 2.3) вблизи, например, частот $-\omega_0$, ω_0 , определяет гармонический сигнал с бесконечно малой амплитудой.

Убедимся в этом, считая, что из-за малости Δf значения спектральной плотности около частот $-\omega_0$, ω_0 равны соответственно $S(-j\omega_0) = |S(j\omega_0)|e^{-j\varphi(\omega_0)}$ и $S(j\omega_0) = |S(j\omega_0)|e^{j\varphi(\omega_0)}$. Найдем сигнал по спектральной плотности, приведенной на рис. 2.3:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0 - \pi\Delta f}^{-\omega_0 + \pi\Delta f} |S(j\omega_0)| e^{-j\varphi(\omega_0)} e^{j\omega t} d\omega +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \pi\Delta f}^{\omega_0 + \pi\Delta f} |S(j\omega_0)| e^{j\varphi(\omega_0)} e^{j\omega t} d\omega.$$

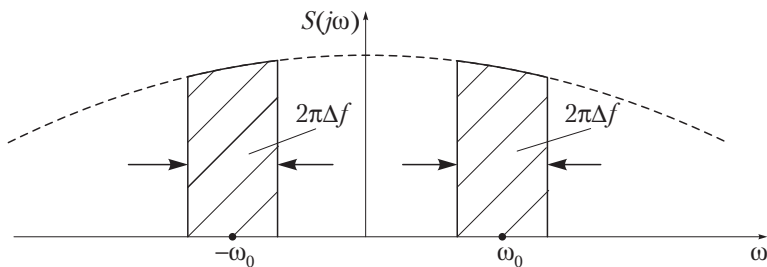


Рис. 2.3. Спектральная плотность гармонического сигнала с бесконечно малой амплитудой

Поскольку в бесконечно малых интервалах спектральная плотность остается постоянной, можно вынести за знак интегралов выражения $|S(j\omega_0)|e^{j\varphi(\omega_0)}$ и $|S(j\omega_0)|e^{-j\varphi(\omega_0)}$:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{|S(j\omega_0)|}{2\pi} e^{-j\varphi(\omega_0)} \int_{-\omega_0 - \pi\Delta f}^{-\omega_0 + \pi\Delta f} e^{j\omega t} d\omega + \frac{|S(j\omega_0)|}{2\pi} e^{j\varphi(\omega_0)} \int_{\omega_0 - \pi\Delta f}^{\omega_0 + \pi\Delta f} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{|S(j\omega_0)|}{\pi t} e^{-j\varphi(\omega_0)} e^{-j\omega_0 t} \left(\frac{e^{j\pi\Delta f t} - e^{-j\pi\Delta f t}}{2j} \right) + \\ &+ \frac{|S(j\omega_0)|}{\pi t} e^{j\varphi(\omega_0)} e^{-j\omega_0 t} \left(\frac{e^{j\pi\Delta f t} - e^{-j\pi\Delta f t}}{2j} \right) = \\ &= \frac{2|S(j\omega_0)|}{\pi t} \sin(\pi\Delta f t) \cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)] = \\ &= 2\Delta f |S(j\omega_0)| \frac{\sin(\pi\Delta f t)}{\pi\Delta f t} \cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]. \end{aligned}$$

Как следует из полученной формулы, амплитуда полученного сигнала определяется значением спектральной плотности, функцией $(\sin x)/x$ и весьма малым диапазоном частот Δf . При стремлении Δf к нулю функция $(\sin x)/x$ стремится к единице, а амплитуда становится равной нулю.

5. Если все составляющие спектральной плотности ограниченного во времени сигнала сдвигаются по фазе на $\mp\omega t_0$, то этот сигнал сдвигается во времени на величину $\mp t_0$. Действительно:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{\mp j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega(t \mp t_0)} d\omega = u(t \mp t_0).$$

6. При передаче ограниченного во времени сигнала через линейный четырехполюсник, АЧХ которого в полосе пропускания равна постоянной величине K_0 , а фазовая характеристика $\varphi(\omega) = -\omega t_0$, форма этого сигнала остается неизменной, а сигнал запаздывает во времени на величину t_0 :

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{K_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = K_0 u(t - t_0). \end{aligned}$$

Пример 2.2. Рассчитать спектральную плотность задержанного во времени одиночного прямоугольного импульса с длительностью τ_n и амплитудой A , ее АЧХ и ФЧХ.

Решение. Спектральная плотность задержанного на время t_0 импульса равна

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-j\omega x} dx = S_0(j\omega) e^{-j\omega t_0},$$

где $u(t)$ — импульс, который расположен в начале координат;

$$S_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-j\omega x} dx; \quad t - t_0 = x; \quad dt = dx.$$

Вычисления дают следующий результат:

$$S(j\omega) = A e^{-j\omega t_0} \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} e^{-j\omega t} dt = \left(A \tau_n \frac{\sin \frac{\omega \tau_n}{2}}{\frac{\omega \tau_n}{2}} \right) e^{-j\omega t_0}. \quad (2.18)$$

Запишем эту плотность в виде

$$S(j\omega) = S_0(j\omega) e^{-j\omega t_0},$$

где

$$S_0(j\omega) = A \tau_n \left| \frac{\sin \frac{\omega \tau_n}{2}}{\frac{\omega \tau_n}{2}} \right| q(\omega), \quad q(\omega) = \begin{cases} 1, & S_0(j\omega) > 0, \\ -1, & S_0(j\omega) < 0. \end{cases}$$

Последнее выражение определяет спектральную плотность сигнала $u(t)$. В диапазоне частот $[2\pi/\tau_n]$ спектральная плотность является положительной величиной, $q(\omega) = e^{j\varphi(\omega)} = 1$. Поэтому в этом диапазоне фазовая характеристика $\varphi(\omega) = 0$, так как $q(\omega) = e^{j\varphi(\omega)} = \cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)$.

В диапазоне частот $[2\pi/\tau_n, 4\pi/\tau_n]$ спектральная плотность является отрицательной величиной. Фазовая характеристика в этом диапазоне равна $\varphi(\omega) = \pi$, так как $q(\omega) = e^{j\varphi(\omega)} = -1$, и т.д.

АЧХ спектральной плотности задержанного импульса совпадает с АЧХ спектральной плотности сигнала $u(t)$, а ФЧХ определяется выражением

$$e^{-j[\omega t_0 - \varphi(\omega)]}.$$

Спектральная плотность прямоугольного импульса $u(t)$, АЧХ и ФЧХ этой плотности изображены на рис. 2.4.

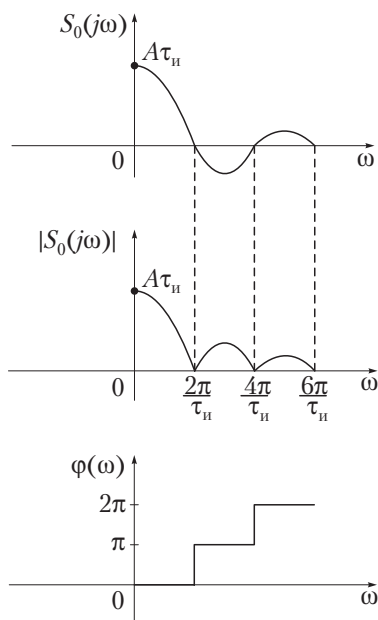


Рис. 2.4. Спектральная плотность, АЧХ и ФЧХ спектральной плотности прямоугольного импульса

Пример 2.3. Вычислить спектральную плотность кодированного сигнала

$$u(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k u_0(t - k\tau_n),$$

где a_k — элементы кодового слова, равные -1 или 1 , т.е. $a_k = \mp 1$, $u_0(t)$ — прямоугольный импульс с амплитудой A и длительностью τ_n .

Решение. Применим формулу (2.14):

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} a_k u_0(t - k\tau_n) e^{-j\omega t} dt.$$

После замены переменной $t - k\tau_n = x$, $dt = dx$, получим

$$S(j\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \left(\int_0^{\tau_n} u_0(x) e^{-j\omega x} dx \right) e^{-j\omega k\tau_n} = A\tau_n \frac{\sin \frac{\omega\tau_n}{2}}{\frac{\omega\tau_n}{2}} e^{-j\omega\tau_n/2} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-j\omega k\tau_n}.$$

Пример 2.4. Вычислить спектральную плотность периодического сигнала, записанного в виде ряда Фурье в тригонометрической форме [см. формулу (2.11)]. Записать выражения АЧХ и ФЧХ постоянной, синусной и косинусной составляющих этого ряда.

Решение. Функции, определяющие формулу (2.11), — периодические, за исключением постоянной составляющей. Эту составляющую аппроксимируем периодической косинусной функцией с частотой, которая стремится к нулю:

$$u(t) = \lim_{\Omega \rightarrow 0} (a_0/2) \cos \Omega t.$$

Вычислим спектральную плотность периодического сигнала $u(t) = a \cos \Omega t$, записав его в виде

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_0(t - kT),$$

где $T = 2\pi/\Omega$;

$$u_0(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -T/2, \quad T/2 < t < \infty, \\ a \cos \Omega t, & -T/2 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

Спектральная плотность сигнала $u_0(t)$:

$$\begin{aligned} S_0(j\omega) &= a \int_{-T/2}^{T/2} \cos \Omega t e^{-j\omega t} dt = \frac{a}{2} \int_{-T/2}^{T/2} (e^{-j\Omega t} + e^{j\Omega t}) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{aT}{2} \left(\frac{\sin[(\Omega + \omega)T/2]}{(\Omega + \omega)T/2} + \frac{\sin[(\Omega - \omega)T/2]}{(\Omega - \omega)T/2} \right). \end{aligned}$$

Значение первого слагаемого, стоящего в скобках выражения, равно 1, если $\omega = -\Omega$, и равно 0 для других дискретных значений частоты $\omega = k\Omega$, $k = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$. Значение второго слагаемого равно 1, если $\omega = \Omega$, и равно 0 для других дискретных значений частоты $\omega = k\Omega$, $k = 0, -1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$. Учитывая это, найдем спектральную плотность, АЧХ и ФЧХ спектральной плотности периодического сигнала $u(t) = a \cos \Omega t$:

$$\begin{aligned} S_c(j\omega) &= \frac{2\pi}{T} S_0(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\Omega) = \\ &= \frac{2\pi}{T} \frac{aT}{2} \left(\frac{\sin[(\Omega + \omega)T/2]}{(\Omega + \omega)T/2} + \frac{\sin[(\Omega - \omega)T/2]}{(\Omega - \omega)T/2} \right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\Omega) = \\ &= \pi a [\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega)]. \end{aligned}$$

Значения АЧХ спектральной плотности в точках частотной оси $\omega = \mp\Omega$ равны $\pi a T / (2\pi) = aT/2$.

Значения ФЧХ спектральной плотности гармонического сигнала в точках частотной оси $\omega = \mp\Omega$ равны 0.

По формуле спектральной плотности косинусоидального сигнала можно найти спектральную плотность постоянной составляющей:

$$S(j\omega) = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \pi \frac{a_0}{2} [\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega)] = \pi a_0 \delta(\omega).$$

АЧХ спектральной плотности постоянной составляющей определяется значением

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{\pi a_0 T}{2\pi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a_0 T}{2} = \infty.$$

Вычисление спектральной плотности синусоидального сигнала аналогично вычислению спектральной плотности косинусоидального сигнала.

Запишем периодический сигнал $u(t) = b \sin \Omega t$ в виде

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_0(t - kT),$$

где $T = 2\pi/\Omega$;

$$u_0(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -T/2, T/2 < t < \infty, \\ b \sin \Omega t, & -T/2 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

Спектральная плотность сигнала $u_0(t)$:

$$\begin{aligned} S_0(j\omega) &= b \int_{-T/2}^{T/2} \sin \Omega t e^{-j\omega t} dt = \frac{b}{2j} \int_{-T/2}^{T/2} (e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{bTj}{2} \left(\frac{\sin[(\Omega + \omega)T/2]}{(\Omega + \omega)T/2} - \frac{\sin[(\Omega - \omega)T/2]}{(\Omega - \omega)T/2} \right). \end{aligned}$$

По найденному выражению найдем спектральную плотность периодического сигнала $u(t) = b \sin \Omega t$:

$$S_s(j\omega) = j\pi b [\delta(\omega + \Omega) - \delta(\omega - \Omega)].$$

АЧХ спектральной плотности этого сигнала в точках частотной оси $\omega = \mp\Omega$:

$$\frac{\pi b T}{2\pi} = \frac{b T}{2}.$$

Значения ФЧХ спектральной плотности сигнала в точках частотной оси $\omega = \mp\Omega$ равны $-\pi/2$, $\pi/2$.

Полученные формулы для спектральных плотностей гармонических сигналов позволяют найти спектральную плотность суммы этих сигналов:

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= S_c(j\omega) + S_s(j\omega) = \pi a[\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega)] + \\ &+ j\pi b[\delta(\omega + \Omega) - \delta(\omega - \Omega)] = \\ &= \pi(a + jb)\delta(\omega + \Omega) + \pi(a - jb)\delta(\omega - \Omega) = \\ &= \pi\alpha(\Omega)\{e^{-j\varphi(\Omega)}\delta(\omega + \Omega) + e^{j\varphi(\Omega)}\delta(\omega - \Omega)\}, \end{aligned}$$

где $\alpha(\Omega) = \sqrt{a^2 + b^2}$ — модуль спектра, равный амплитуде гармонического сигнала; $\varphi(\Omega) = -\arctg(b/a)$ — значение фазы спектра, равное значению начальной фазы этого сигнала.

Ряд Фурье в тригонометрической форме (2.11) содержит бесконечно большое число сумм гармонических сигналов:

$$a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t.$$

Спектральная плотность этой суммы находится по последнему выражению спектральной плотности заменой $\Omega = k\omega_1$. Используя эту формулу и формулу спектральной плотности постоянной составляющей, получим выражение спектральной плотности сигнала, записанного в виде ряда Фурье в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \pi a_0 \delta(\omega) + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \{(a_k + jb_k)\delta(\omega + k\omega_1) + (a_k - jb_k)\delta(\omega - k\omega_1)\} = \\ &= \pi a_0 \delta(\omega) + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k\omega_1) \{e^{-j\varphi(k\omega_1)}\delta(\omega + k\omega_1) + e^{j\varphi(k\omega_1)}\delta(\omega - k\omega_1)\}, \quad (2.19) \end{aligned}$$

где $\alpha(k\omega_1) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ — модуль спектра; $\varphi(k\omega_1) = -\arctg(b_k/a_k)$ — значение фазы спектра, равное значению начальной фазы гармонического сигнала.

Для периодической последовательности импульсов, приведенной на рис. 2.1,

$$a_0 = \frac{2A\tau_n}{T}; \quad a_k = 2A \frac{\tau_n}{T} \left(\sin \frac{k\omega_1 \tau_n}{2} \right); \quad \frac{k\omega_1 \tau_n}{2}; \quad b_k = 0.$$

Спектральная плотность

$$S(j\omega) = 2\pi \frac{A\tau_n}{T} \delta(\omega) +$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2\pi \frac{A\tau_n}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\omega_1\tau_n/2)}{k\omega_1\tau_n/2} \{\delta(\omega + k\omega_1) + \delta(\omega - k\omega_1)\} = \\
 &= 2\pi \frac{A\tau_n}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\omega_1\tau_n/2)}{k\omega_1\tau_n/2} \delta(\omega - k\omega_1).
 \end{aligned}$$

Вычисленная спектральная плотность является математической моделью периодически повторяющегося видеопульса прямоугольной формы в частотной области. График спектральной плотности показан на рис. 2.5. Дельта-функции на этом рисунке условно изображены стрелками.

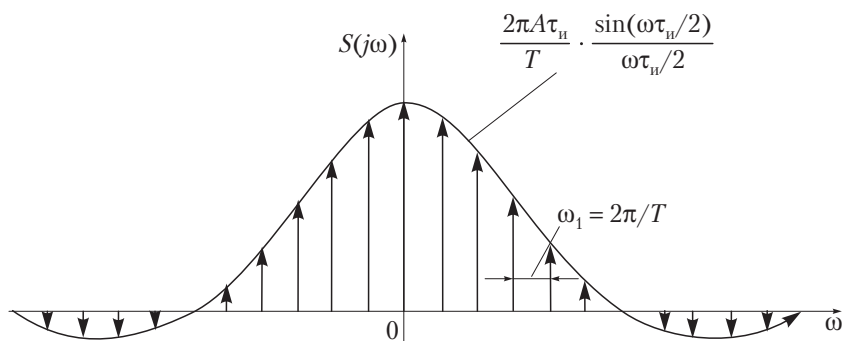


Рис. 2.5. Спектральная плотность периодической последовательности импульсов

График содержит информацию о постоянной составляющей и гармонических сигналах, входящих в ряд Фурье в тригонометрической форме.

Пример 2.5. По спектральной плотности, вид которой приведен на рис. 2.6, вычислить выражение для сигнала $u(t)$.

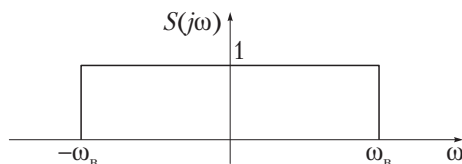


Рис. 2.6. Спектральная плотность сигнала

Р е ш е н и е. Спектральная плотность сигнала ограничена значениями частоты, равными $-\omega_B, \omega_B$. Найдем сигнал:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{j\omega t} d\omega = 2F_B \frac{\sin \omega_B t}{\omega_B t}.$$

Размерность сигнала: [В].



2.3. Спектральная плотность мощности детерминированного сигнала

Под энергией сигнала $u(t)$ понимают величину

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt.$$

Если сигнал имеет конечную длительность T , т.е. не равен нулю на отрезке времени $[-T/2, T/2]$, то его энергия

$$E = \int_{-T/2}^{T/2} u^2(t) dt.$$

Запишем выражение для энергии сигнала, используя формулу (2.15):

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) S^*(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 df. \end{aligned}$$

где

$$S^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{j\omega t} dt = |S(j\omega)| e^{-j\varphi(\omega)};$$

$$S(j\omega) S^*(j\omega) = |S(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} |S(j\omega)| e^{-j\varphi(\omega)} = |S(j\omega)|^2.$$

Полученное равенство называется *равенством Парсеваля*. Оно определяет энергию сигнала через временную функцию или спектральную плотность энергии, которая равна $|S(j\omega)|^2$. Спектральная плотность энергии называется также **энергетическим спектром**.

Рассмотрим сигнал, существующий на ограниченном интервале времени. К такому сигналу применимо равенство Парсеваля. Следовательно,

$$\int_{-T/2}^{T/2} u^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 df.$$

Разделим левую и правую части равенства на интервал времени, равный T , и устремим этот интервал к бесконечности:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S(j\omega)|^2}{T} df = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) df,$$

где

$$G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S(j\omega)|^2}{T}. \quad (2.20)$$

С увеличением T энергия незатухающих сигналов возрастает, однако отношение $\frac{|S(j\omega)|^2}{T}$ может стремиться к определенному пределу. Этот предел называется *спектральной плотностью мощности* $G(\omega)$. Размерность спектральной плотности мощности: $[B^2/Гц]$.



2.4. Автокорреляционная функция

Автокорреляционная функция сигнала $u(t)$ определяется следующим интегральным выражением:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t + \tau)dt, \quad (2.21)$$

где τ — аргумент, определяющий функцию $R(\tau)$ и имеющий размерность времени; $u(t + \tau)$ — исходный сигнал, сдвинутый во времени на величину $-\tau$.

Автокорреляционная функция имеет следующие свойства.

1. Значение автокорреляционной функции при сдвиге $\tau = 0$ равно энергии сигнала E :

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)dt = E.$$

2. Автокорреляционная функция при сдвигах $\tau \neq 0$ меньше энергии сигнала:

$$R(\tau) < R(0) = E.$$

3. Автокорреляционная функция является четной функцией, т.е.

$$R(\tau) = R(-\tau).$$

В справедливости свойств 2 и 3 убедимся на примере.

Пример 2.6. Вычислить автокорреляционные функции сигналов: видеосигнала, представленного на рис. 2.7, а, и радиосигнала с теми же амплитудой и длительностью. Несущая частота радиосигнала равна ω_0 , а начальная фаза равна 0.

Решение. Первую задачу решим графическим способом. Автокорреляционная функция определяется интегралом от произведения функции $u(t)$ и ее смещенной во времени копии. Смещение видеосигнала найдем из уравнения $t + \tau = 0$. График функции $u(t + \tau)$ приведен на рис. 2.7, б. Площадь, определяемая графиком произведения $u(t)u(t + \tau)$ (рис. 2.7, в), равна

$$A^2(\tau_n - \tau) = R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t + \tau)dt.$$

Отсюда

$$R(\tau) = A^2\tau_n(1 - \tau/\tau_n).$$

Функция $R(\tau)$ определяется уравнением прямой (рис. 2.7, г). Функция имеет максимум, если значение аргумента $\tau = 0$, и равна 0, если $\tau = \tau_n$. Для других значений аргумента $R(\tau) < R(0)$. Это свидетельствует о справедливости свойства 2.

Чтобы убедиться в справедливости свойства 3, аналогично вычислим функцию для отрицательных значений τ :

$$R(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t - \tau)dt = A^2\tau_n(1 - \tau/\tau_n).$$

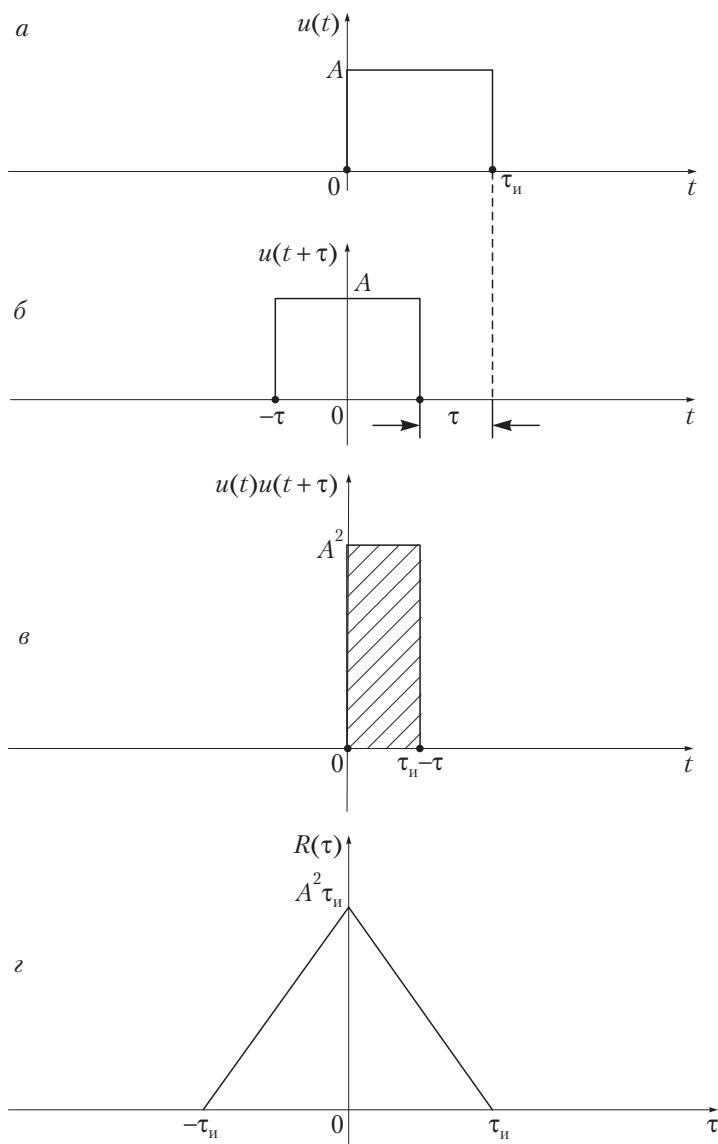


Рис. 2.7. К вычислению автокорреляционной функции прямоугольного видеоимпульса:

a — прямоугольный видеоимпульс; *б* — задержанный во времени прямоугольный импульс; *в* — произведение импульсов; *г* — автокорреляционная функция

Окончательное выражение для автокорреляционной функции

$$R(\tau) = A^2 \tau_n (1 - |\tau|/\tau_n).$$

Функция приведена на рис. 2.7, z и имеет треугольный вид.

Вычислим автокорреляционную функцию радиосигнала, расположив его симметрично относительно вертикальной оси. Радиосигнал:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & -\tau_n/2 > t > \tau_n/2, \\ A \cos \omega_0 t, & \tau_n/2 \geq t \geq -\tau_n/2. \end{cases}$$

Подставляя значения сигнала и его сдвинутой копии в формулу для автокорреляционной функции $R(\tau)$, получим

$$\begin{aligned} R(\tau) &= A^2 \int_{(-\tau_n/2)+\tau}^{\tau_n/2} \cos \omega_0 t \cos \omega_0 (t - \tau) dt = \\ &= \frac{A^2 \tau_n}{2} \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_n} \right) \cos \omega_0 \tau + \frac{A^2}{2} \int_{(-\tau_n/2)+\tau}^{\tau_n/2} \cos (2\omega_0 t - \omega_0 \tau) dt = \\ &= \frac{A^2 \tau_n}{2} \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_n} \right) \cos \omega_0 \tau + \frac{A^2 \tau_n}{2} \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_n} \right) \frac{\sin \omega_0 \tau_n \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_n} \right)}{\omega_0 \tau_n \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_n} \right)}. \end{aligned}$$

Выражение для автокорреляционной функции радиоимпульса состоит из двух слагаемых. Первое из них определяется произведением треугольной функции и гармонического сигнала. На выходе согласованного фильтра это слагаемое реализуется в виде ромбовидного радиоимпульса. Второе слагаемое определяется произведением треугольной функции и функций $(\sin x)/x$, расположенных в точках $\tau = \mp \tau_n$. Значения функций $(\sin x)/x$, которые оказывают заметное влияние на второе слагаемое автокорреляционной функции, весьма быстро убывают при изменении аргумента τ от $-\tau_n$ до ∞ и от τ_n до $-\infty$. Решив уравнение

$$\omega_0 \tau_n (1 - |\tau|/\tau_n) = \pi,$$

можно найти интервалы задержки, в пределах которых значения функций $(\sin x)/x$ еще влияют на поведение функции $R(\tau)$. Для положительных значений задержки

$$\tau_n - \tau = 1/(2f_0) = T_0/2,$$

где T_0 — период гармонического сигнала.

Аналогично находится интервал для отрицательных значений задержки.

Поскольку влияние второго слагаемого автокорреляционной функции ограничивается весьма малыми (по сравнению с длительностью радиоимпульсов τ_n) интервалами $T_0/2$, в пределах которых значения треугольной функции весьма малы, то вторым слагаемым автокорреляционной функции радиоимпульса можно пренебречь.

Выявим связь автокорреляционной функции $R(\tau)$ со спектральной плотностью энергии сигнала $|S(j\omega)|^2$. Для этого выразим сдвинутый во времени сигнал $u(t + \tau)$ через его спектральную плотность $S(j\omega)$:

$$u(t + \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega(t+\tau)} d\omega.$$

Подставим данное выражение в выражение (2.21). В результате получим

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega(t+\tau)} d\omega \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{j\omega t} dt \right] e^{j\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) S^*(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Нетрудно убедиться также в справедливости равенства

$$|S(j\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.23)$$

Разделим обе части равенства (2.23) на интервал времени T и устремим величину T к бесконечности:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S(j\omega)|^2}{T} = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{R(\tau)}{T} e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

С учетом формулы (2.20) перепишем полученное выражение:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (2.24)$$

где $B(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{R(\tau)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t)u(t + \tau)dt$ — предел отноше-

ния автокорреляционной функции ограниченного во времени сигнала к значению этого времени и при стремлении его к бесконечности. Если этот предел существует, то он определяется обратным преобразованием Фурье от спектральной плотности мощности сигнала.

Обобщением понятия «автокорреляционная функция» является **взаимно корреляционная функция**, которая представляет собой скалярное произведение двух сигналов:

$$R_{u,v}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t + \tau)dt.$$

Рассмотрим основные свойства взаимно корреляционной функции.

1. Перестановка сомножителей под знаком интеграла изменяет знак аргумента взаимно корреляционной функции:

$$\begin{aligned} R_{u,v}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t + \tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(x - \tau)v(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v(t)u(t - \tau)dt = R_{v,u}(-\tau). \end{aligned}$$

В приведенных преобразованиях использована замена $t + \tau = x$.

2. Взаимно корреляционная функция, в отличие от автокорреляционной функции, не является четной относительно аргумента τ .

3. Взаимно корреляционная функция определяется обратным преобразованием Фурье от произведения спектральных плотностей сигналов $u(t)$, $v(t)$:

$$R_{u,v}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(j\omega)S_v^*(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega.$$

Эта формула может быть выведена аналогично формуле (2.22).

Взаимно корреляционная функция между периодически повторяющимся сигналом $u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_0(t - kT)$ и непериодическим сигналом $v(t) = u_0(t)$

$$\begin{aligned} R_{u,v}(\tau) &= R_{u,u_0}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_0(t - kT) u_0(t - \tau) dt = \\ &= \int_0^{\tau} u_0(t) u_0(t + T - \tau) dt + \int_{\tau}^T u_0(t) u_0(t - \tau) dt = \\ &= R(\tau - T) + R(\tau), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $R(\tau)$ — автокорреляционная функция непериодического сигнала $u_0(t)$.

Полученное выражение равно сумме двух интегралов. При сдвиге, равном нулю, первый интеграл равен нулю, а второй равен энергии сигнала. При сдвиге, равном периоду сигнала, первый интеграл равен энергии сигнала, а второй равен нулю. Каждое значение функции при других сдвигах равно сумме значений автокорреляционных функций непериодического сигнала, смещенных относительно друг друга на один период. Кроме того, взаимно корреляционная функция является периодической функцией, удовлетворяющей уравнению

$$R_{u,u_0}(\tau) = R_{u,u_0}(\tau + pT), \quad p = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots$$

Взаимно корреляционная функция $R_{u,v}(\tau)$ между сигналом $u(t)$ и сигналом

$$\begin{aligned} v(t) &= u_0(t + nT) + \dots + u_0(t + 2T) + u_0(t + T) + u_0(t) + \\ &+ u_0(t - T) + u_0(t - 2T) + \dots + u_0(t - nT) \end{aligned}$$

равна $R_{u,v}(\tau) = (2n + 1)R_{u,u_0}(\tau)$, где $(2n + 1)T$ — длительность сигнала $v(t)$.

Действительно, вследствие того что период сигнала $u(t)$ равен T и

$$u_0(t) = u_0(t \mp T) = u_0(t \mp 2T) = \dots = u_0(t \mp nT),$$

взаимно корреляционная функция

$$R_{u,v}(\tau) = R_{u,u_{-n}}(\tau) + \dots + R_{u,u_{-2}}(\tau) + R_{u,u_{-1}}(\tau) + R_{u,u_0}(\tau) + \\ + R_{u,u_1}(\tau) + R_{u,u_2}(\tau) + \dots + R_{u,u_n}(\tau) = (2n+1)R_{u,u_0}(\tau),$$

где $u_{\mp 1} = u_0(t \mp T)$, $u_{\mp 2} = u_0(t \mp 2T)$, $u_{\mp n} = u_0(t \mp nT)$.

Вычисляя предел функции $(2n+1)R_{u,u_0}(\tau)$ при $n \rightarrow \infty$, определим выражение для автокорреляционной функции периодического сигнала:

$$R(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)R_{u,u_0}(\tau).$$

Размерность функции: $[B^2/\Gamma\text{ц}]$.

Значения функции при нулевом сдвиге и других сдвигах, для которых $R_{u,u_0}(\tau) \neq 0$, равны бесконечности. По этой причине использование последнего выражения в качестве характеристики периодического сигнала теряет смысл.

Разделим последнее выражение на интервал, равный $(2n+1)T$. В результате получим функцию

$$B(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)R_{u,u_0}(\tau)}{(2n+1)T} = \frac{R_{u,u_0}(\tau)}{T} = \frac{R(\tau-T) + R(\tau)}{T} = \\ = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} u_0(t)u_0(t-\tau+T)dt + \frac{1}{T} \int_{\tau}^T u_0(t)u_0(t-\tau)dt = \\ = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)u(t-\tau)dt, \quad (2.26)$$

так как вследствие периодичности функции $u_0(t-\tau+T) = u_0(t-\tau)$.

Полученная формула определяет функцию $B(\tau)$ как предел отношения автокорреляционной функции сигнала, существующего в интервале времени $(2n+1)T$, к этому интервалу и стремлении его к бесконечности. Этот предел для периодически повторяющегося сигнала называется **автокорреляционной функцией периодического сигнала**. Размерность этой функции: $[B^2]$.

Прямое преобразование Фурье одного периода автокорреляционной функции периодического сигнала определяет спектральную плотность мощности, которая является непрерывной функцией

частоты. По этой плотности, используя формулу (2.17), можно найти *спектральную плотность мощности периодической автокорреляционной функции сигнала*, которая определяется для дискретных значений частот:

$$G_{\Pi}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k\omega_1) \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k\omega_1),$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$.

Если автокорреляционная функция записана в виде ряда Фурье в тригонометрической форме, то выражение для ее спектральной плотности

$$G_{\Pi}(\omega) = a_0 \pi \delta(0) + \pi \sum_{k=1}^{\infty} a_k [\delta(\omega + k\omega_1) + \delta(\omega - k\omega_1)], \quad (2.27)$$

где

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} B(\tau) \cos k\omega_1 \tau d\tau.$$

Пример 2.7. Вычислить периодическую автокорреляционную функцию сигнала $u(t) = A \sin \Omega t$. По найденной функции, ограниченной одним периодом, определить спектральную плотность мощности.

Решение. Подставляя в выражение (2.26) заданный сигнал, получим выражение для периодической автокорреляционной функции:

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{A^2}{T} \int_0^T \sin \Omega t \sin \Omega(t - \tau) dt = \\ &= \frac{A^2}{2T} \int_0^T \cos \Omega \tau dt - \frac{A^2}{2T} \int_0^T \cos(2\Omega t - \Omega \tau) dt = \frac{A^2}{2} \cos \Omega \tau. \end{aligned}$$

Полученное выражение подставим в формулу (2.24) и найдем спектральную плотность мощности:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = \frac{A^2}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\Omega \tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = \\ &= \frac{A^2 T}{4} \left[\frac{\sin(\Omega + \omega) T/2}{(\Omega + \omega) T/2} + \frac{\sin(\Omega - \omega) T/2}{(\Omega - \omega) T/2} \right]. \end{aligned}$$

Пример 2.8. Для периодической нормированной автокорреляционной функции шумоподобного сигнала (M -последовательности с периодом $N = 1023$) вычислить спектральную плотность мощности. (Периодическая функция для последовательности меньшей длины ($N = 15$) приведена на рис. 3.39.)

Решение. Для сравнительно большого периода $N = 1023$ значения автокорреляционной функции в интервале $T - \tau_0 \geq \tau \geq \tau_0$, где τ_0 — длительность импульса шумоподобной последовательности, примем равными нулю. В этом случае автокорреляционная функция определяется периодически повторяющейся с периодом T последовательностью треугольных импульсов. Основание каждого треугольника равно $2\tau_0$, а его высота равна 1. Уравнение, определяющее автокорреляционную функцию в пределах одного периода, равно $B(\tau) = 1 - |\tau|/\tau_0$. Учитывая четность этой функции, определим коэффициенты ряда Фурье:

$$\begin{aligned} b_k &= 0, \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} B(\tau) \cos k\omega_1 \tau d\tau = \frac{2}{T} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} (1 - |\tau|/\tau_0) \cos k\omega_1 \tau d\tau = \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{\tau_0} (1 - \tau/\tau_0) \cos k\omega_1 \tau d\tau = \frac{2\tau_0}{T} \frac{\sin^2(k\omega_1 \tau_0/2)}{(k\omega_1)^2 (\tau_0/2)^2}, \end{aligned}$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$.

При вычислении интеграла использована формула

$$\int x \cos ax dx = (\cos ax)/a^2 + (x \sin ax)/a.$$

Подставляя вычисленные коэффициенты в формулу (2.27), получим

$$\begin{aligned} G_{\Pi}(\omega) &= (\tau_0/T) 2\pi \delta(\omega) + \\ &+ \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (2\tau_0/T) \frac{\sin^2(k\omega_1 \tau_0/2)}{(k\omega_1)^2 (\tau_0/2)^2} [\delta(k\omega_1 + \omega) + \delta(k\omega_1 - \omega)] \right\} = \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\tau_0/T) \frac{\sin^2(k\omega_1 \tau_0/2)}{(k\omega_1)^2 (\tau_0/2)^2} \delta(\omega - k\omega_1). \end{aligned}$$

Спектральная плотность мощности периодической автокорреляционной функции равна взвешенной сумме бесконечно большого числа дельта-функций. Весовые множители определяются квадратом функции $(\sin x)/x$, умноженной на постоянный коэффициент $2\pi(\tau_0/T)$.

Корреляционные функции цифровых сигналов связаны с корреляционными функциями последовательностей символов. Для кодовой последовательности (см. § 1.3) конечного числа N

двоичных символов автокорреляционная функция записывается в виде

$$r(q) = \sum_{k=0}^{N-1-q} a_k a_{k+q},$$

где a_k — двоичные символы, равные 0 или 1, или символы, равные $-1, 1$; q — сдвиг между символами, $q = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Последовательности символов могут быть как детерминированными, так и случайными. При передаче информации характерным свойством последовательности символов является их случайность. Значения автокорреляционной функции (при сдвигах, не равных нулю), вычисленные по заранее записанной случайной последовательности конечной длины, также являются случайными.

Автокорреляционные функции детерминированных последовательностей, которые используются для синхронизации, а также в качестве носителей дискретных сообщений, являются детерминированными функциями.

Сигналы, построенные с использованием кодов или их кодовых последовательностей, называются **кодированными сигналами**.

Большинство свойств автокорреляционной функции кодовой последовательности совпадает с рассмотренными выше свойствами автокорреляционной функции сигнала.

При нулевом сдвиге автокорреляционная функция кодовой последовательности достигает максимума, который равен

$$r(0) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2.$$

Если символы равны $-1, 1$, то $r(0) = N$.

Значения автокорреляционной функции при других сдвигах меньше $r(0)$.

Автокорреляционная функция кодовой последовательности является четной функцией.

Обобщением автокорреляционной функции является взаимно корреляционная функция. Для кодовых последовательностей одинаковой длины эта функция

$$r_{1,2}(q) = \sum_{k=0}^{N-1-q} a_k b_{k+q},$$

где a_k, b_k — символы соответственно первой и второй последовательности.

Многие свойства функции $r_{1,2}(q)$ совпадают со свойствами взаимно корреляционной функции рассмотренных выше сигналов. Если функция $r_{ij}(q)$, $i \neq j$, для любой пары кода при сдвиге $q = 0$ равна нулю, то такие коды называются *ортгоналичными*. Краткое описание некоторых используемых в системах связи кодов приведено в приложениях 2–4.

Взаимно корреляционная функция между кодовой последовательностью и периодически повторяющейся той же последовательностью называется **периодической автокорреляционной функцией кодовой последовательности**. Выражение для функции следует из выражений (2.25), (2.26):

$$b(q) = r(q - N)/N + r(q)/N,$$

где $r(q)$ — непериодическая автокорреляционная функция кодовой последовательности; q — значение сдвига между последовательностями.

Подставим в полученную формулу выражения автокорреляционных функций:

$$b(q) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k a_{k-q+N} + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1-q} a_k a_{k+q} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k a_{k+q}, \quad (2.28)$$

где a_k, a_{k+q} — элементы кодовой последовательности.

Периодическая автокорреляционная функция кодовой последовательности равна взаимно корреляционной функции, вычисленной для кодовой последовательности и циклически сдвинутых символов этой последовательности. Циклически сдвинутые кодовые последовательности, полученные по исходной последовательности $\vec{a}_0 = a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$, приведены ниже. Кодовая последовательность $\vec{a}_1$ получена в результате сдвига исходной последовательности $\vec{a}_0$ на один символ вправо и переноса последнего символа a_{N-1} в начало сдвинутой последовательности. Остальные последовательности получены аналогично:

$$\begin{aligned}\bar{a}_1 &= a_{N-1}a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad ..., \quad a_{N-2} \\ \bar{a}_2 &= a_{N-2}a_{N-1}a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad ..., \quad a_{N-3} \\ \\ \bar{a}_{N-1} &= a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad ..., \quad a_{N-1}, \quad a_0.\end{aligned}$$

Пример 2.9. Вычислить автокорреляционную и периодическую автокорреляционную функцию кодированного сигнала (рис. 2.8, а)

$$u(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k u_0(t - k\tau_{\text{и}}),$$

где $u_0(t)$ — прямоугольный импульс с амплитудой A и длительностью $\tau_{\text{и}}$.

Этот сигнал построен из прямоугольных импульсов, знак которых определяется весовыми коэффициентами: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, а их число $N = 3$. Длительность сигнала равна $3\tau_{\text{и}}$.

Решение. Подставляя выражение для сигнала в формулу (2.21), получим

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} a_k u_0(t - k\tau_{\text{и}}) \sum_{m=0}^{N-1} a_m u_0(t - m\tau_{\text{и}} - \tau) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} a_k a_m \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t - k\tau_{\text{и}}) u_0(t - m\tau_{\text{и}} - \tau) dt. \end{aligned}$$

Произведем замену переменной $t - k\tau_{\text{и}}$ на x :

$$R(\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} a_k a_m \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) u_0[x + (k - m)\tau_{\text{и}} - \tau] dx.$$

Обозначим: $k - m = q$ — и заменим дискретные переменные k , m на переменные k , q . В результате получим

$$R(\tau) = \sum_{q=-N+1}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1-q} a_k a_{k+q} R_0(\tau - q\tau_{\text{и}}) = \sum_{q=-N+1}^{N-1} r(q) R_0(\tau - q\tau_{\text{и}}),$$

где

$$R_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) u_0(x - \tau) dx; \quad r(q) = \sum_{k=0}^{N-1-q} a_k a_{k+q}.$$

График автокорреляционной функции для заданного сигнала показан на рис. 2.8, б. Эта функция зависит от автокорреляционной функции $R_0(\tau)$ прямоугольного импульса и значений автокорреляционной функции $r(q)$ кодовой последовательности. Вычисленные значения этой функции:

$$r(0) = a_0 a_0 + a_1 a_1 + a_2 a_2 = 3,$$

$$r(1) = a_0 a_1 + a_1 a_2 = 1 - 1 = 0,$$

$$r(2) = a_0 a_2 = -1.$$

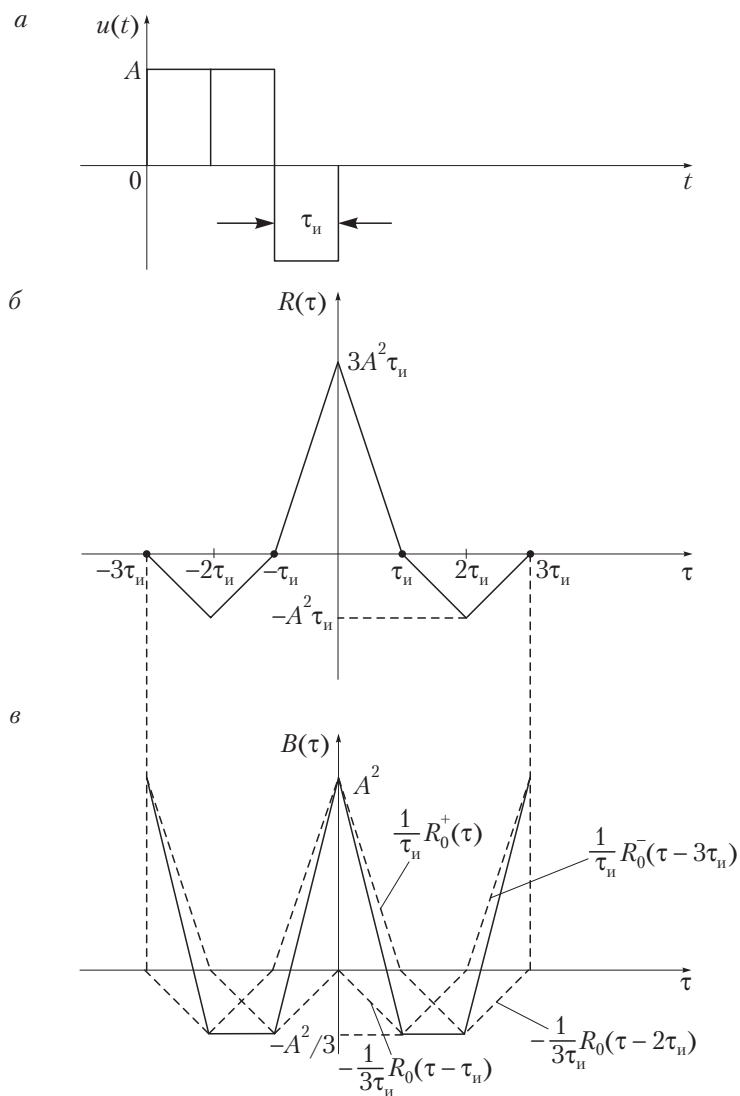


Рис. 2.8. Автокорреляционная функция кодированного сигнала:
a — кодированный сигнал; *б* — автокорреляционная функция сигнала;
в — автокорреляционная функция периодического сигнала

Вычислим периодическую автокорреляционную функцию, используя рассчитанную выше автокорреляционную функцию, полученные значения автокорреляционной функции кодовой последовательности и формулу (2.28).

Периодическая автокорреляционная функция

$$B(\tau) = \frac{1}{N\tau_n} \sum_{q=0}^{N-1} \{r(q-N)R_0[\tau - (q-N)\tau_n] + r(q)R_0(\tau - q\tau_n)\}.$$

Подставим заданное значение $N = 3$ в полученную формулу:

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{1}{3\tau_n} \sum_{q=0}^2 \{r(q-3)R_0[\tau - (q-3)\tau_n] + r(q)R_0(\tau - q\tau_n)\} = \\ &= \frac{1}{3\tau_n} [r(-3)R_0(\tau + 3\tau_n) + r(0)R_0(\tau) + r(-2)R_0(\tau + 2\tau_n) + \\ &\quad + r(1)R_0(\tau - \tau_n) + r(-1)R_0(\tau + \tau_n) + r(2)R_0(\tau - 2\tau_n)]. \end{aligned}$$

С учетом значений автокорреляционной функции кодовой последовательности $r(\mp 3) = 0$, $r(\mp 2) = -1$, $r(\mp 1) = 0$, $r(0) = 3$ запишем окончательное выражение для одного периода периодической автокорреляционной функции сигнала:

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{1}{3\tau_n} [3R_0(\tau) - R_0(\tau + 2\tau_n) - R_0(\tau - 2\tau_n)] = \\ &= \left\{ R_0^+(\tau)/\tau_n + R_0^-(\tau - 3\tau_n)/\tau_n \left[R_0(\tau - \tau_n) + R_0(\tau - 2\tau_n) \right] \right\} / 3\tau_n, \end{aligned}$$

где $R_0^+(\tau) = R_0(\tau)$, $\tau \geq 0$; $R_0^-(\tau) = R_0(\tau)$, $\tau < 0$; $R_0(\tau + 2\tau_n) = R_0(\tau - \tau_n)$.

График функции приведен на рис. 2.8, в.

2.5. Комплексное и квазигармоническое представление узкополосных сигналов



При анализе прохождения сигнала через блоки системы связи его удобно выразить с помощью **комплексной функции времени**

$$\dot{W}(t) = u(t) + ju^*(t) = \vartheta(t)e^{j\theta(t)}, \quad (2.29)$$

где $u(t) = \text{Re} \dot{W}(t)$ — действительная часть; $u^*(t) = \text{Im} \dot{W}(t)$ — мнимая часть; $\vartheta(t)$ — огибающая; $\theta(t)$ — мгновенная фаза сигнала.

Графическое представление сигнала приведено на рис. 2.9. Поскольку фаза зависит от времени, вектор $\dot{W}(t)$ вращается. Условно считают, что вращение вектора направлено против часовой стрелки.

Сигнал $\dot{W}(t)$ называется *аналитическим*, если функции $u^*(t)$ и $u(t)$ образуют *пару преобразований Гильберта*:

$$u^*(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

$$u(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^*(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

Функция $u^*(t)$ является *сопряженной* по отношению к функции $u(t)$. Если функция $u(t)$ удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости, то она может быть выражена через ее спектральную плотность:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Записанный интеграл можно представить в виде двух интегралов. Первый из них соответствует отрицательным, а второй — положительным частотам:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.30)$$

По функции (2.29) найдем комплексно-сопряженную функцию $\dot{W}_1(t)$. Складывая ее с функцией (2.29), получим

$$\dot{W}_1(t) + \dot{W}(t) = 2u(t).$$

Следовательно,

$$u(t) = \frac{1}{2} \dot{W}_1(t) + \frac{1}{2} \dot{W}(t). \quad (2.31)$$

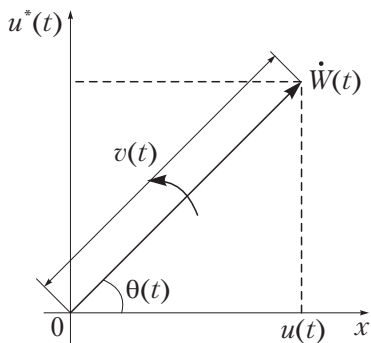


Рис. 2.9. Графическое представление комплексного сигнала

Сравнивая формулы (2.30) и (2.31), найдем следующие выражения для комплексных функций:

$$\dot{W}_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.32)$$

$$\dot{W}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.33)$$

Следовательно, если функции $u(t)$ и $u^*(t)$ образуют пару преобразований Гильберта, то аналитический сигнал определяется формулой (2.33). Учитывая, что для любого аналитического сигнала спектральная плотность в области отрицательных частот равна 0, формулу (2.33) можно записать иначе:

$$\dot{W}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Из последнего выражения находим, что спектральная плотность аналитического сигнала

$$S_W(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{W}(t) e^{-j\omega t} dt = \begin{cases} 0, & \omega < 0; \\ 2S(j\omega), & \omega \geq 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

Подставим в (2.34) выражение (2.29):

$$\begin{aligned} S_W(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} [u(t) + ju^*(t)] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt + j \int_{-\infty}^{\infty} u^*(t) e^{-j\omega t} dt = S(j\omega) + jS^*(j\omega). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Учитывая условия (2.34), запишем выражение (2.35) в виде

$$S(j\omega) + jS^*(j\omega) = 0, \quad \omega < 0, \quad (2.36)$$

$$S(j\omega) + jS^*(j\omega) = 2S(j\omega), \quad \omega \geq 0. \quad (2.37)$$

Решая уравнения (2.36), (2.37), находим

$$S^*(j\omega) = jS(j\omega), \quad \omega < 0, \quad (2.38)$$

$$S^*(j\omega) = -jS(j\omega), \quad \omega \geq 0. \quad (2.39)$$

Сопряженная спектральная плотность, соответствующая сопряженному сигналу $u^*(t)$, может быть найдена по спектральной плотности сигнала $u(t)$ поворотом всех спектральных составляющих на 90° в области отрицательных частот [формула (2.38)] и поворотом всех спектральных составляющих на -90° в области положительных частот [формула (2.39)]. Если функции $u(t)$, $u^*(t)$ составляют пару преобразований Гильберта, то огибающая и фаза сигнала однозначно определяются по формулам

$$\vartheta(t) = \sqrt{u^2(t) + u^{*2}(t)}, \quad \theta(t) = \arctg \frac{u^*(t)}{u(t)}.$$

Производная от фазы сигнала определяет *мгновенную частоту*

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}.$$

По мгновенной частоте находится *мгновенная фаза сигнала*:

$$\theta(t) = \int \omega(t) dt.$$

Часто фазу сигнала представляют в виде

$$\theta(t) = \omega_0 t + \psi(t) + \varphi_0 = \omega_0 t + \varphi(t), \quad (2.40)$$

где ω_0 — независимая от времени частота, которая называется *несущей*; $\psi(t)$, φ_0 — соответственно переменная составляющая и постоянная составляющая мгновенной фазы; $\varphi(t) = \psi(t) + \varphi_0$.

Подставляя (2.40) в (2.29), получим

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= \vartheta(t) \cos \theta(t) + j \vartheta(t) \sin \theta(t) = \\ &= \vartheta(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] + j \vartheta(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Действительная часть последнего выражения:

$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname{Re} \dot{W}(t) = \vartheta(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = \\ &= A(t) \cos \omega_0 t + B(t) \sin \omega_0 t, \end{aligned} \quad (2.42)$$

где $A(t) = \vartheta(t) \cos \varphi(t)$, $B(t) = -\vartheta(t) \sin \varphi(t)$ — квадратурные составляющие.

Математическим выражением (2.42) пользуются при изучении частотно-избирательных цепей с ограниченной шириной полосы пропускания. Если эта ширина невелика по сравнению с несущей частотой, то выходной сигнал называется *узкополосным*. Узкопо-

лосный сигнал является *квазигармоническим*, т.е. почти гармоническим колебанием, у которого огибающая и фаза являются медленно меняющимися функциями времени.

Пример 2.10. Для функции $u(t) = \cos \omega_0 t$ найти сопряженную по Гильберту функцию $u^*(t)$.

Решение. Применим прямое преобразование Гильберта:

$$u^*(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega_0 \tau}{t - \tau} d\tau.$$

Обозначим $t - \tau = -\lambda$. Тогда

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega_0(t + \lambda)}{\lambda} d\lambda = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 t \frac{\cos \omega_0 \lambda}{\lambda} d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega_0 t \frac{\sin \omega_0 \lambda}{\lambda} d\lambda = \\ &= -\frac{1}{\pi} \cos \omega_0 t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega_0 \lambda}{\lambda} d\lambda + \frac{1}{\pi} \sin \omega_0 t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 \lambda}{\lambda} d\lambda = \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

При вычислении использованы следующие табличные интегралы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega_0 \lambda}{\lambda} d\lambda = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 \lambda}{\lambda} d\lambda = \pi.$$

Из приведенного примера видно, что сопряженный по Гильберту сигнал находится путем сдвига фазы на $\pi/2$ у исходного сигнала.



2.6. Геометрические представления сигналов

При решении ряда задач, связанных с анализом и преобразованием сигналов, целесообразно отображать эти сигналы векторами некоторого векторного пространства.

Совокупность двух чисел x_1, y_1 определяет координаты вектора $\vec{z}$ в двумерном пространстве (рис. 2.10). Длина d вектора $\vec{z}$ равна его норме:

$$d = \|\vec{z}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad (2.43)$$

где $\|\vec{z}\|$ — модуль комплексного числа.

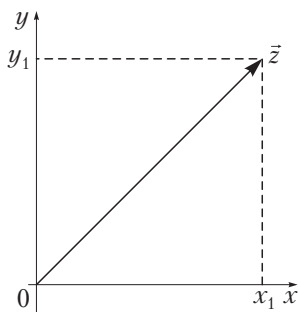


Рис. 2.10. Двумерный вектор

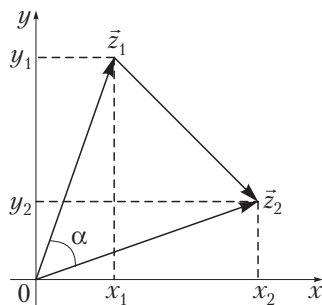


Рис. 2.11. Расстояние между двумя векторами

Расстояние между векторами $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_2$ (рис. 2.11):

$$d(\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \|\vec{z}_1 - \vec{z}_2\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2.44)$$

Скалярное произведение двух векторов:

$$(\vec{z}_1, \vec{z}_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2; \quad (2.45)$$

$$(\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \|\vec{z}_1\| \|\vec{z}_2\| \cos \alpha. \quad (2.46)$$

Формула (2.45) определяет скалярное произведение через проекции векторов на координатные оси, формула (2.46) — через длины векторов и косинус угла между ними.

Если скалярное произведение векторов равно 0, то векторы называются **ортгоналичными**.

Многомерное пространство является обобщением двумерного пространства. Поэтому, зная формулы (2.43)–(2.46) для двумерного пространства, легко написать аналогичные формулы для n -мерного. Например, длина n -мерного вектора $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ определяется *нормой*

$$d = \|\vec{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

Расстояние между двумя n -мерными векторами определяется нормой разности векторов:

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2}.$$

Скалярное произведение двух n -мерных векторов

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha.$$

Линейное векторное пространство, в котором определено скалярное произведение, называется **евклидовым**. Если в евклидовом пространстве норма вектора и расстояние между векторами заданы приведенными выше формулами, то такое пространство называется **нормированным метрическим пространством**.

Развитием понятия векторного пространства является **функциональное пространство**. Норма функции $u(t)$:

$$\|u(t)\| = \sqrt{\int_0^T u^2(t) dt}, \quad (2.47)$$

где T — интервал времени, на котором определена функция $u(t)$.

Расстояние между функциями $u(t)$ и $v(t)$ равно норме разности

$$\|u(t) - v(t)\| = \sqrt{\int_0^T [u(t) - v(t)]^2 dt}.$$

Скалярное произведение функций $u(t)$ и $v(t)$:

$$(u, v) = \int_0^T u(t)v(t) dt, \quad (2.48)$$

$$(u, v) = \|u(t)\| \|v(t)\| \cos \alpha, \quad (2.49)$$

где α — угол между функциями $u(t)$, $v(t)$.

Функции $u(t)$ и $v(t)$ ортогональны, если

$$\int_0^T u(t)v(t) dt = 0.$$

Пространство функций со скалярным произведением (2.48) и нормой (2.47) называется **функциональным пространством Гильберта**.

Раскрывая скобки, для сигналов с одинаковой энергией выражение для нормы разности можно записать иначе:

$$\|u(t) - v(t)\| = \sqrt{2E[1 - r_{u,v}(0)]},$$

где $r_{u,v}(0)$ — значение нормированной взаимно корреляционной функции

$$r_{u,v}(0) = \frac{1}{E} \int_{-T/2}^{T/2} u(t)v(t)dt.$$

Это значение лежит в пределах от -1 до 1 .

Расстояние в функциональном пространстве тем больше, чем больше множитель $[1 - r_{u,v}(0)]$. Для противоположных по знаку сигналов $r_{u,v}(0) = -1$ и множитель равен 2 . В этом случае расстояние между сигналами максимально и равно $2\sqrt{E}$. Противоположные по знаку сигналы реализуются при двоичной фазовой модуляции различных носителей сообщений (постоянного тока, гармонического сигнала, шумоподобного сигнала и т.д.). Как будет показано далее, противоположные по знаку сигналы обеспечивают наибольшую помехоустойчивость приема (см. гл. 7).

Для *ортогональных сигналов*: $r_{u,v}(0) = 0$, $[1 - r_{u,v}(0)] = 1$. Расстояние между ортогональными сигналами меньше, чем у противоположных сигналов, и равно $\sqrt{2E}$. Поэтому помехоустойчивость приема этих сигналов меньше помехоустойчивости противоположных сигналов. Ортогональные сигналы реализуются при двоичной частотной модуляции.

Для передачи информации, кроме двоичных сигналов, используют набор сигналов одинаковой энергии. Для каждой пары сигналов $u_i(t)$, $u_j(t)$ из этого набора желательно обеспечить наибольшее расстояние. Максимальное расстояние, равное $\sqrt{2E(1 - r_{i,j})}$, обеспечивается оптимальной системой сигналов, для которой коэффициенты $r_{i,j}$ одинаковы и удовлетворяют условию

$$\frac{1}{E} \int_{-T/2}^{T/2} u_i(t)u_j(t)dt = \begin{cases} 1, & i = j, \\ -1/(M-1), & i \neq j, M - \text{четное}; \\ -1/M, & i \neq j, M - \text{нечетное}. \end{cases} \quad (2.50)$$

Это так называемые *симплексные сигналы*. В $(M-1)$ -мерном пространстве они образуют правильный симплекс с числом вершин, равным M . Набор симплексных сигналов можно получить на основе двоичных M -последовательностей, которые исследуются далее. Коэффициент $r_{i,j}$ симплексных двоичных сигналов выражается также

и через значения символов, соответствующих этим сигналам кодовых последовательностей:

$$r_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_{i,k} b_{j,k},$$

где $a_{i,k}$, $b_{j,k}$ — символы кодовых последовательностей, равные -1 , 1 .

Коды, все пары кодовых комбинаций которых удовлетворяют условию

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ -1/(M-1), & i \neq j, \quad M - \text{четное}; \\ -1/M, & i \neq j, \quad M - \text{нечетное}, \end{cases}$$

называются *симплексными кодами*.

В системах связи применяют и другие сигналы одинаковой энергии, которые весьма близки к оптимальным сигналам. Число сигналов равно 2^k , $k = 1, 2, 3, \dots$, а каждая пара сигналов удовлетворяет условию ортогональности:

$$\frac{1}{E} \int_{-T/2}^{T/2} u_i(t) u_j(t) dt = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

С ростом размерности пространства различие в расстоянии между парами симплексных и ортогональных сигналов быстро уменьшается и при $M = \infty$ становится равным нулю. К числу ортогональных сигналов относятся сигналы, кодированные последовательностями Уолша и Д-последовательностями (приложение 3).

При изучении двоичных кодов используют *неевклидово пространство*, в котором норма и расстояние определяются формулами

$$\|\vec{a}\| = \sum_{k=1}^N |a_k|,$$

$$\|\vec{a} - \vec{b}\| = \sum_{k=1}^N |a_k - b_k|,$$

где a_k , b_k — символы кодовых последовательностей длиной N ; $|a_k|$, $|a_k - b_k|$ — соответственно модуль значения символа и модуль разности значений символов.

Если двоичные последовательности построены из символов 0, 1, то знак модуля в формулах можно опустить. Кроме того, в формуле для расстояния знак вычитания заменяется знаком суммирования по модулю два. В этом случае норма двоичной кодовой комбинации равна количеству содержащихся в ней единиц, а норма разности двух кодовых комбинаций — числу отличающихся символов в этих комбинациях. Чтобы найти это число, нужно кодовые комбинации поразрядно сложить по модулю два и подсчитать число единиц в полученной сумме. Такое определение расстояния введено Хэммингом и поэтому оно называется *расстоянием Хэмминга*.

Вычислим спектральную плотность произведения двух сигналов:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)e^{-j\omega t} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_v(jz)e^{jzt} dz \right] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_v(jz) \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j(\omega-z)t} dt dz = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_v(jz) \cdot S_u[j(\omega-z)] dz, \end{aligned} \quad (2.51)$$

где $S_v(jz)$ — спектральная плотность сигнала $v(t)$; $S_u(-jz)$ — зеркальное отображение спектральной плотности сигнала $u(t)$.

Выражение (2.51) называется также *сверткой спектров*.

Свертку можно записать и в другом виде, если учесть, что $S_u[j(\omega-z)] = S_u^*[j(z-\omega)]$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_v(jz)S_u^*[j(z-\omega)] dz.$$

Свертка спектров в частотной области определяется произведением соответствующих сигналов во временной области.

При $\omega = 0$ формула (2.51) переходит в формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_v(jz)S_u^*(jz)dz. \quad (2.52)$$

Если $u(t) = v(t)$, то равенство (2.52) превращается в равенство Парсеваля.



2.7. Теорема Котельникова

Для функций с ограниченным спектром В.А. Котельников доказал теорему, которая является теоретической основой построения дискретных систем связи. Ее содержание следующее: любая функция времени $u(t)$ с ограниченным спектром полностью определяется своими значениями, отсчитанными в дискретные моменты времени через интервал $\Delta t = 1/(2F_B)$, где F_B — верхняя граничная частота спектра этой функции.

Спектр функции определен в базисе тригонометрических функций. Если значения АЧХ этого спектра для всех частот $\omega \geq 2\pi F_B$ равны нулю, то такой спектр называется *ограниченным верхней частотой* F_B . Ограничение спектра, например, первичного низкочастотного сигнала можно реализовать с помощью фильтра нижних частот, АЧХ которого для всех частот $\omega \geq 2\pi F_B$ равна нулю. В этом случае на вход фильтра подают первичный сигнал, спектр которого желательно ограничить.

Значения функции, отсчитанные в дискретные моменты времени, называются *отсчетами* этой функции. Согласно теореме Котельникова, при выполнении заданных условий между функцией и всеми ее отсчетами в дискретные моменты времени существует взаимно однозначное соответствие, а функцию можно заменить ее отсчетами. Зависимость между функцией и ее отсчетами определяется рядом Котельникова:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k\Delta t) \frac{\sin[2\pi F_B(t - k\Delta t)]}{2\pi F_B(t - k\Delta t)}. \quad (2.53)$$

Он является разновидностью обобщенного ряда Фурье (2.2) и построен на базе ортонормированных функций

$$\varphi_k(t) = \sqrt{2F_B} \frac{\sin[\omega_B(t - k\Delta t)]}{\omega_B(t - k\Delta t)}, \quad (2.54)$$

где k — целые числа в пределах от $-\infty$ до ∞ .

Эти функции удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) \varphi_l(t) dt &= 0, \quad k \neq l; \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^2(t) dt &= 1, \quad k = l. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Отсчеты $u(k\Delta t)$, входящие в выражение (2.53), связаны с весовыми спектральными коэффициентами α_k и в базисе вида $(\sin x)/x$ определяют дискретный спектр сигнала. Однако учитывая, что каждая базисная функция сравнительно быстро убывает до нулевого значения, функция $u(t)$ для любого момента времени определяется ограниченным числом этих произведений.

Весовые коэффициенты вычисляются по формуле

$$\alpha_l = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \varphi_l(t) dt.$$

Для вычисления коэффициентов воспользуемся формулой (2.52) и результатами примера 2.5. В этом примере по спектральной плотности с единичной АЧХ в диапазоне частот от $-\omega_B$ до ω_B найден сигнал

$$\frac{2F_B (\sin \omega_B t)}{\omega_B t}.$$

Базисная функция отличается от этого сигнала первым сомножителем (он в $\sqrt{2F_B}$ раз меньше) и сдвигом во времени, который равен $l\Delta t$. Следовательно, спектральная плотность базисной функции равна

$$\frac{1}{\sqrt{2F_B}} e^{-j\omega l\Delta t}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (2.52), получим

$$\begin{aligned} \alpha_l &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \varphi_l(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\varphi(jz) S_u(-jz) dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2F_B}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(-jz) e^{-jz l\Delta t} dz = \frac{1}{\sqrt{2F_B}} u(l\Delta t). \end{aligned}$$

Следовательно, весовой спектральный коэффициент определяет отсчет функции.

Подставляя выражение спектрального коэффициента α_k и значение базисной функции (2.54) в выражение (2.2), получим ряд Котельникова:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{u(k\Delta t)}{\sqrt{2F_B}} \left(\sqrt{2F_B} \frac{\sin[2\pi F_B(t - k\Delta t)]}{2\pi F_B(t - k\Delta t)} \right).$$

Вычислим энергию левой и правой частей полученного ряда:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{u(k\Delta t)}{\sqrt{2F_B}} \left(\sqrt{2F_B} \frac{\sin[2\pi F_B(t - k\Delta t)]}{2\pi F_B(t - k\Delta t)} \right) \right]^2 dt = \\ &= \frac{1}{2F_B} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u^2(k\Delta t) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sqrt{2F_B} \frac{\sin[2\pi F_B(t - k\Delta t)]}{2\pi F_B(t - k\Delta t)} \right]^2 dt + \\ &+ \frac{1}{2F_B} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{l=-\infty \\ k \neq l}}^{\infty} u(k\Delta t) u(l\Delta t) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sqrt{2F_B} \frac{\sin[2\pi F_B(t - k\Delta t)]}{2\pi F_B(t - k\Delta t)} \right] \times \\ &\times \left[\sqrt{2F_B} \frac{\sin[2\pi F_B(t - l\Delta t)]}{2\pi F_B(t - l\Delta t)} \right] dt = \frac{1}{2F_B} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u^2(k\Delta t). \quad (2.56) \end{aligned}$$

При вычислении энергии использованы формулы (2.55). Равенство (2.56) является аналогом равенства Парсеваля, приведенного в § 2.3. Оно определяет энергию сигнала через сумму квадратов спектральных коэффициентов в базисе функций вида $(\sin x)/x$.

Изучая теорему Котельникова, полезно обратить внимание на следующее:

□ в теореме не оговаривается вид функции $u(t)$. Поэтому она может быть и случайной;

□ из равенства (2.53) следует, что вся информация о функции $u(t)$ содержится в ее отсчетах $u(k\Delta t)$, так как базисные функции, являясь известными, никаких сведений не несут. Поэтому при передаче отсчетов по каналу связи сохраняется вся необходимая информация о сообщении. Можно передавать отсчеты непосредственно, а можно перевести их в числа;

□ теорема определяет восстановление сообщения на приемном конце: отсчеты необходимо умножить на базисные функции и результаты сложить.

Процесс взятия отсчетов называется *дискретизацией* (отсчеты обычно берут через одинаковые интервалы времени). Устройство, с помощью которого ведется дискретизация, называется *дискретизатором*. Он является частью аналого-цифрового преобразователя. В этом качестве можно использовать управляемый ключ, замыкаемый на непродолжительное время.

Структурная схема дискретизатора, выполненная на ключе, приведена на рис. 2.12. Временные диаграммы, поясняющие работу дискретизатора — на рис. 2.13. В течение длительности управляющих импульсов $v(t)$ вход ключа соединяется с выходом и на выходе ключа действует входное напряжение в виде модулированных по амплитуде импульсов, длительность которых равна длительности управляющих импульсов. Так как эта длительность, как правило, выбирается весьма малой, непосредственная передача отсчетов оказывается возможной только по сравнительно широкополосным каналам и на небольшие расстояния. Поэтому в цифровых системах связи отсчеты переводятся в двоичные слова, для передачи символов которых требуется меньшая ширина полосы пропускания канала.

При восстановлении в приемнике непрерывной функции нужно генерировать базисные функции с аргументами $2\pi F_b(t - k\Delta t)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ — номера этих функций, $k\Delta t$ — дискретные моменты времени. Базисная функция с номером $k = 0$ показана на рис. 2.14.

Задачу можно решить с использованием ЭВМ, в памяти которой хранятся значения базисной функции, или с использованием фильтра нижних частот. Если на вход фильтра с коэффициентом передачи, равным 0 на всей частотной оси, а в интервале от $-\omega_b$ до ω_b — равным K_0 , подать очень короткий видеоимпульс с амплитудой,

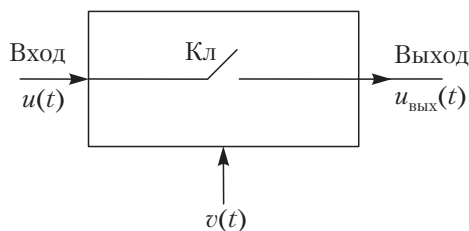


Рис. 2.12. Структурная схема дискретизатора

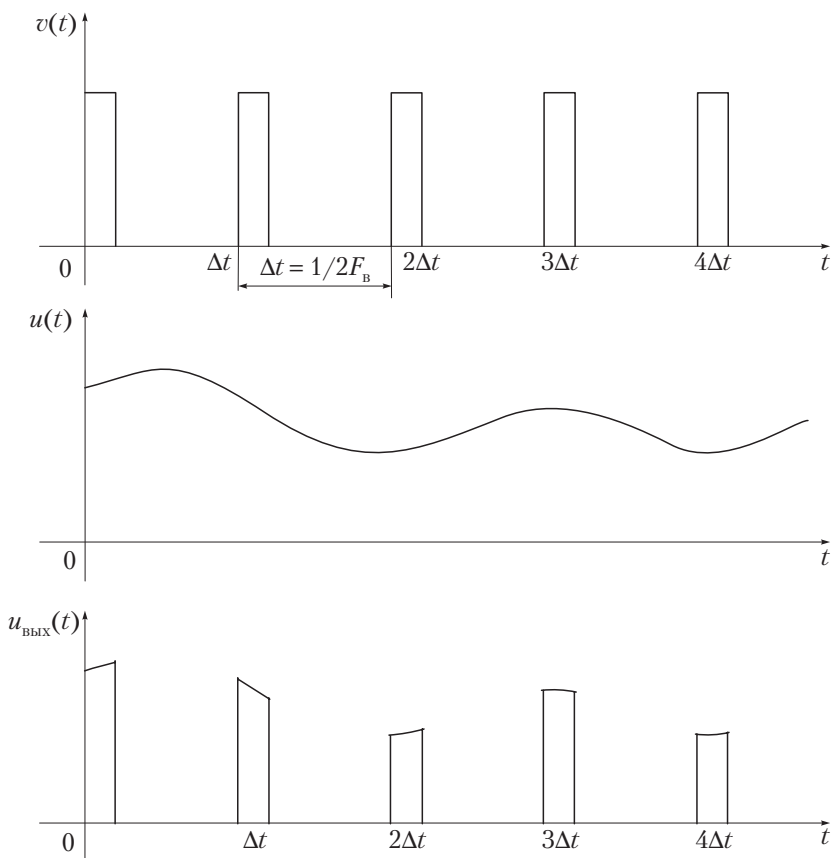


Рис. 2.13. Временные диаграммы, поясняющие работу дискретизатора

равной отсчетному значению сигнала, то на его выходе появится сигнал, повторяющий базисную функцию и пропорциональный этому значению. Убедимся в этом.

Спектральная плотность импульса на входе фильтра определяется формулой (2.18), если $t_0 = 0$:

$$S_{\text{вх}}(j\omega) = u(0)\tau_{\text{и}} \frac{\sin \omega\tau_{\text{и}}/2}{\omega\tau_{\text{и}}/2}.$$

Если длительность $\tau_{\text{и}}$ видеоимпульса выбрана достаточно малой, то в пределах интервала частот от $-\omega_{\text{в}}$ до $\omega_{\text{в}}$ эту спектральную

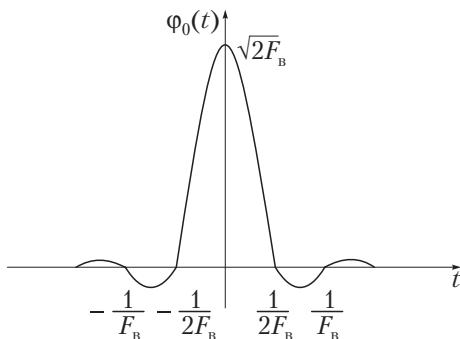


Рис. 2.14. Базисная функция

плотность можно считать постоянной и равной $u(0)\tau_n$. Поэтому спектральная плотность сигнала на выходе фильтра нижних частот

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = S_{\text{вх}}(j\omega)K(j\omega) = u(0)\tau_n K_0.$$

Сигнал на выходе фильтра

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{u(0)\tau_n K_0}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{j\omega t} d\omega = 2u(0)K_0\tau_n F_B \frac{\sin \omega_B t}{\omega_B t}.$$

Процесс восстановления сигнала по его отсчетам поясняется рис. 2.15.

Для реального сигнала, который начинается в момент времени $t = 0$ и заканчивается в момент времени $t = (N - 1)\Delta t$, ряд Котельникова записывается в виде

$$u(t) = \sum_{k=0}^{N-1} u(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi F_B(t - k\Delta t)}{2\pi F_B(t - k\Delta t)}. \quad (2.57)$$

Число отсчетов в пределах длительности сигнала T_c становится конечной величиной, равной

$$N = T_c/\Delta t = 2F_B T_c,$$

а формула — приближенной.

Ограниченное число отсчетов называется *выборкой* сигнала.

Погрешность представления сигнала его значениями в этом случае определяется отношением:

$$\varepsilon = \frac{\Delta E}{E},$$

где ΔE — энергия за пределами частот $\pm\omega_B$; E — энергия сигнала,

$$\Delta E = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi F_B}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega;$$

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega,$$

где $S(j\omega)$ — спектральная плотность сигнала.

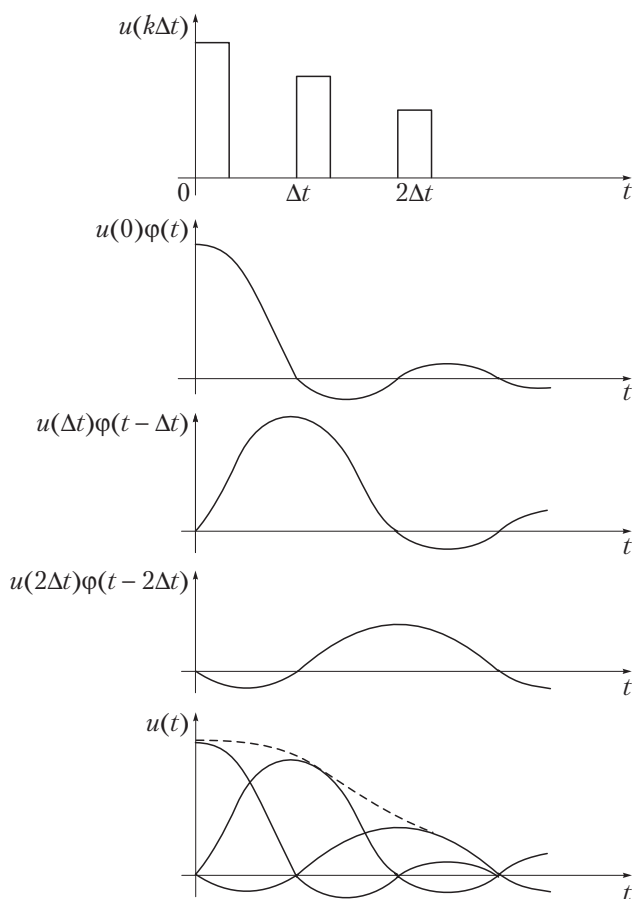


Рис. 2.15. Временные диаграммы, поясняющие восстановление сигнала

Для того чтобы погрешность была весьма малой величиной, необходимо выполнить условие $N = 2F_{\text{в}}T_{\text{с}} \gg 1$. Его можно выполнить за счет увеличения как $T_{\text{с}}$, так и $F_{\text{в}}$. Если $F_{\text{в}} \rightarrow \infty$, то разложение (2.57) становится точным даже при конечной длительности сигнала $T_{\text{с}}$.

Если сигнал имеет относительно узкий спектр, ограниченный частотами f_1 и f_2 (рис. 2.16), и записывается в виде

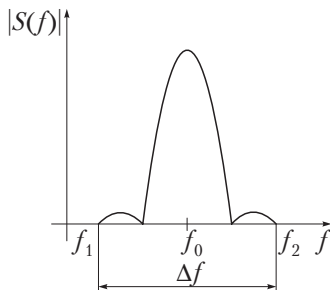


Рис. 2.16. Спектр узкополосного сигнала

$$u(t) = \vartheta(t) \cos[2\pi f_0 t + \varphi(t)],$$

где $f_0 = (f_1 + f_2)/2$, $\vartheta(t)$ — огибающая, $\varphi(t)$ — составляющая фазы узкополосного сигнала, то выражение для сигнала можно разложить в ряд:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n_1} \varphi'_k(t) \vartheta_k \cos(2\pi f_0 t + \varphi_k),$$

где

$$\varphi'_k(t) = \frac{\sin \pi \Delta f (t - k\Delta t)}{\pi \Delta f (t - k\Delta t)}; \quad \Delta f = f_2 - f_1;$$

$$\vartheta_k = \vartheta(k\Delta t); \quad \varphi_k = \varphi(k\Delta t); \quad n_1 = \Delta f T_{\text{с}},$$

$T_{\text{с}}$ — длительность сигнала.

Функция $u(t)$ полностью определяется значениями амплитуды и фазы, взятыми через интервалы времени $\Delta t = 1/\Delta f$. Общее количество отсчетов равно $2\Delta f T_{\text{с}}$.



2.8. Ряд Уолша

С развитием методов обработки цифровых сигналов определенный интерес стала представлять система базисных функций Уолша, которая имеет следующие свойства.

1. Любая функция определяется номером $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, безразмерным временем $\theta = t/T$ и записывается в виде $\text{Wal}(n, \theta)$.

2. Каждая функция при $n > 0$ на отрезке существования $[0; 1]$ принимает значения $-1, 1$.

3. Функции Уолша строятся на основе функций Радемахера $r(m, \theta)$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, которые в том же интервале $[0; 1]$ принимают значения $-1, 1$. Например, функция $r(1, \theta)$ равна 1 в интервале относительного времени $[0; 1/2]$ и равна -1 в интервале $[1/2; 1]$, т.е. определяется двоичным словом 1, -1 , длительность каждого символа которого равна $1/2$. Функция $r(2, \theta)$ определяется словом 1, $-1, 1, -1$, длительность каждого символа которого равна $1/4$. Функция $r(3, \theta)$ определяется словом 1, $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1$, длительность каждого символа которого равна $1/8$, и т.д. На рис. 2.17 показаны функции Радемахера для $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Выражения некоторых функций Уолша через функции Радемахера приведены в табл. 2.1

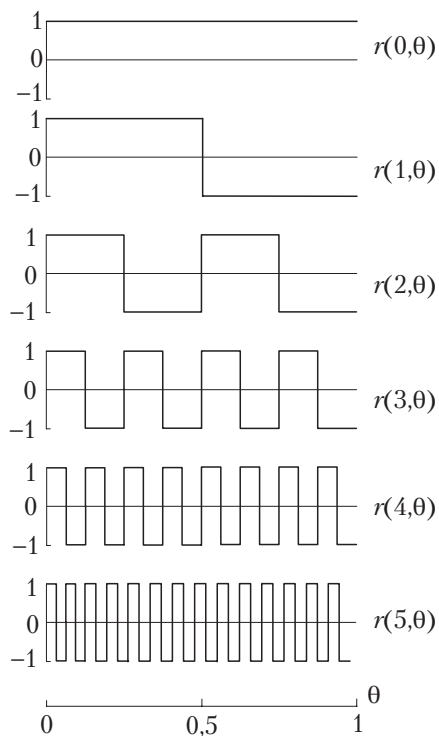


Рис. 2.17. Функции Радемахера

Таблица 2.1

Выражение функций Уолша через функции Радемахера

Значение функции Уолша	Выражение
0	$\text{Wal}(0, \theta) = 1$
1	$\text{Wal}(1, \theta) = r(1, \theta)$
2	$\text{Wal}(2, \theta) = r(1, \theta) r(2, \theta)$
3	$\text{Wal}(3, \theta) = r(2, \theta)$
4	$\text{Wal}(4, \theta) = r(2, \theta) r(3, \theta)$

4. Произведение любых двух функций Уолша также дает функцию Уолша. Это свойство называется *мультипликативностью*.

5. Среднее значение функции Уолша равно 0, если $n \neq 0$.

6. Функции Уолша являются ортонормированными функциями. Они удовлетворяют условиям

$$\int_0^1 \text{Wal}(n, \theta) \text{Wal}(k, \theta) d\theta = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

Разложение сигнала в обобщенный ряд Фурье с использованием базисных функций Уолша имеет вид

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{Wal}(n, \theta), \quad (2.58)$$

где c_n — весовые спектральные коэффициенты.

Ряд (2.58) называется *рядом Уолша*.

Умножим левую и правую части равенства (2.58) на функцию Уолша и результат проинтегрируем в пределах интервала T разложения сигнала:

$$\int_0^T u(t) \text{Wal}(k, \theta) dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^T \text{Wal}(n, \theta) \text{Wal}(k, \theta) dt.$$

Учитывая, что функции Уолша являются ортонормированными, найдем выражение для весовых спектральных коэффициентов:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \text{Wal}(n, \theta) dt,$$

где $\theta = t/T$.

При разложении сигнала в ряд Уолша и использовании ЭВМ существенно сокращается время выполнения операций по сравнению с разложением в ряд Фурье в тригонометрической форме потому, что при вычислении коэффициентов ряда Фурье в тригонометрической форме сигнал умножается на значения тригонометрических функций. Число этих значений велико, тогда как при вычислении коэффициентов ряда Уолша число значений базисных функций равно двум.

Дальнейшее сокращение времени вычислений дает применение быстрого преобразования Уолша, в котором используются математические преобразования, аналогичные быстрому преобразованию Фурье (см. п. 3.11.4). Ограничиваясь N членами разложения, получают формулу усеченного ряда Уолша:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \text{Wal}(n, \theta).$$

Пример 2.11. Вычислить ряд Уолша для прямоугольного импульса, если интервал разложения $[-T/2; T/2]$, а длительность импульса равна $T/2$. Функции Уолша приведены на рис. 2.18, импульс — на рис. 2.19.

Решение. Вычислим коэффициенты ряда Уолша:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} u(t) \text{Wal}[0, \theta] dt = \frac{A}{T} \int_{-T/4}^{T/4} dt = A/2;$$

$$c_1 = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} u(t) \text{Wal}[1, \theta] dt = \frac{A}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \text{Wal}[1, \theta] dt = 0;$$

$$c_2 = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} u(t) \text{Wal}[2, \theta] dt = -\frac{A}{T} \frac{T}{2} = -\frac{A}{2}.$$

Остальные коэффициенты равны 0.

Ряд Уолша:

$$u(t) = (A/2) \text{Wal}[0, \theta] - (A/2) \text{Wal}[2, \theta].$$

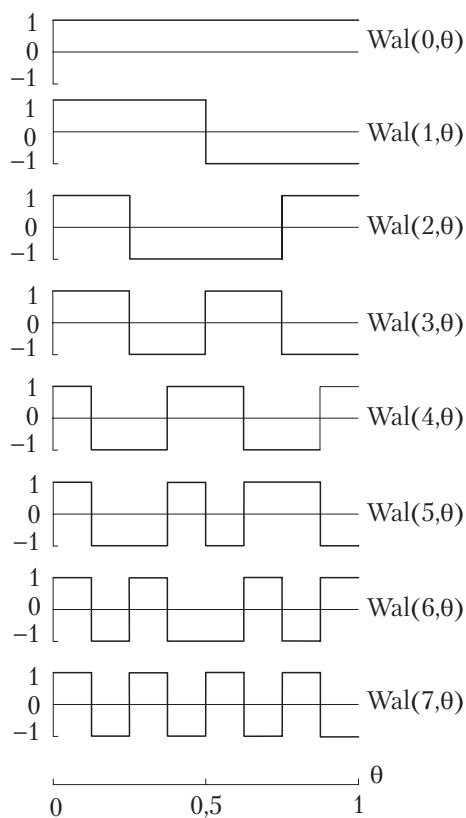


Рис. 2.18. Функции Уолша

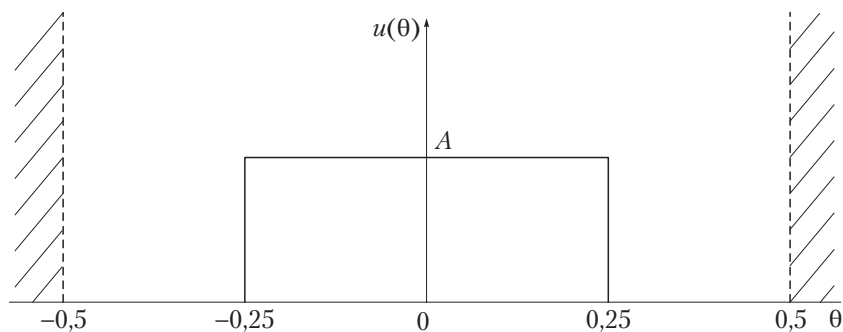


Рис. 2.19. Сигнал в интервале разложения

Контрольные вопросы

1. Что такое детерминированный сигнал?
2. Приведите выражения для сигнала с использованием рядов Фурье в комплексной и тригонометрической формах.
3. В чем различие между спектральными плотностями непериодического и периодического сигналов?
4. Как временная функция сигнала $u(t)$ выражается через спектральную плотность $S(j\omega)$?
5. В каком соотношении находятся спектральная плотность мощности и автокорреляционная функция периодического сигнала?
6. Что такое аналитический сигнал?
7. Какой сигнал называется узкополосным?
8. Какому условию удовлетворяют ортогональные сигналы?
9. Чему равно расстояние между двумя функциями $v(t)$ и $u(t)$?
10. Как формулируется теорема Котельникова?
11. Как записывается выражение для сигнала с использованием ряда Уолша?



МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ

3.1. Определения линейной, нелинейной и параметрической систем

Структурная схема системы связи состоит из отдельных блоков, между которыми заданы определенные связи. Блоки, как и система в целом, имеют входы и выходы.

При подаче сигнала $u_{\text{вх}}(t)$ на вход блока на его выходе формируется сигнал $u_{\text{вых}}(t)$.

Операция L преобразования входного сигнала, в результате которой формируется определенный выходной сигнал, называется **оператором**.

Оператор вместе с условиями и ограничениями, которые накладываются на входной и выходной сигналы, определяют **математическую модель блока (системы)**.

Система (блок), у которой выходное напряжение не зависит от момента времени, с которого начинается входной сигнал, называется **стационарной**. Показатели качества и параметры стационарной системы не зависят от времени. Если указанное условие не выполняется, система называется **нестационарной**.

Под **линейной** понимают такую систему, оператор которой удовлетворяет условиям

$$L[u_{\text{вх1}}(t) + u_{\text{вх2}}(t)] = L[u_{\text{вх1}}(t)] + L[u_{\text{вх2}}(t)]; \quad (3.1)$$

$$L[\alpha u_{\text{вх}}(t)] = \alpha L u_{\text{вх}}(t), \quad (3.2)$$

где α — произвольное число.

Аналогичное определение дается для линейного блока или устройства.

В *нелинейной* системе условия (3.1), (3.2) не выполняются.

Равенство (3.1) выражает свойство аддитивности, а равенство (3.2) — свойство однородности. Свойство *аддитивности* означает, что реакция на сумму сигналов равна сумме реакций на каждый из этих сигналов в отдельности. Свойство *однородности* заключается в том, что отклик линейной системы на увеличенный в α раз входной сигнал равен увеличенному в то же число раз отклику линейной системы на входной сигнал.

Под *параметрической* понимают такую систему, параметры которой изменяются во времени. Параметрические системы могут быть как линейными, так и нелинейными. Отклик линейной параметрической цепи на входной сигнал равен

$$u_{\text{вых}}(t) = \Phi(t)u_{\text{вх}}(t), \quad (3.3)$$

где $\Phi(t)$ — оператор, зависящий от времени и выражающий параметрическое преобразование.

Оператор можно представить в виде полинома по некоторым функциям времени $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$:

$$\Phi(t) = q_0 + q_1\varphi_1(t) + q_2\varphi_2(t) + \dots + q_n\varphi_n(t), \quad (3.4)$$

где $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$ — постоянные множители.

Ниже рассматриваются только линейные параметрические системы.

3.2. Преобразование сигналов в параметрических и нелинейных цепях

3.2.1. Линейные преобразования дискретного спектра

Вычислительный или экспериментальный процесс определения спектрального состава сигнала называется **спектральным анализом**.

Между сигналами и их спектрами существует взаимно однозначное соответствие, поэтому задача преобразования сигнала

может быть сформулирована и как задача преобразования его спектра: при заданном входном спектре и операторе преобразования требуется найти спектр выходного сигнала.

Ниже рассмотрены задачи преобразования дискретных спектров, непрерывных и дискретно-непрерывных спектральных плотностей сигналов в линейных, параметрических и нелинейных цепях. В дальнейшем, если это не будет оговорено дополнительно, будем использовать спектр, найденный в базисе тригонометрических функций ($\sin x$, $\cos x$). Этот спектр определяется амплитудами, фазами и значениями частот гармонических сигналов ряда Фурье в тригонометрической форме. В гл. 2 введено также понятие спектральной плотности, которая связана с сигналом прямым преобразованием Фурье и может быть непрерывной, дискретной и дискретно-непрерывной.

При линейном преобразовании спектральные компоненты входного сигнала изменяются по амплитуде и приобретают дополнительный сдвиг по фазе. Это приводит к искажению его формы.

Для входного дискретного спектра выходной спектр является также дискретным. Пусть входной сигнал $u_{\text{вх}}(t)$ в интервале $[-T/2; T/2]$ представлен в виде ряда Фурье в тригонометрической форме:

$$u_{\text{вх}}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k\omega_1) \cos[k\omega_1 t + \varphi(k\omega_1)], \quad (3.5)$$

где $\alpha(k\omega_1) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$; $\varphi(k\omega_1) = -\arctg(b_k/a_k)$.

Ряд (3.5) получен на основе ряда Фурье в комплексной форме [см. формулы (2.6), (2.7)].

При воздействии k -й гармоники входного сигнала на линейную цепь с коэффициентом передачи $K(jk\omega_1)$ на ее выходе появится сигнал с амплитудой $\alpha(k\omega_1)K(k\omega_1)$ и начальной фазой

$$\Psi(k\omega_1) = \varphi(k\omega_1) + \varphi_k(k\omega_1),$$

где $\varphi_k(k\omega_1)$ — фазовый сдвиг линейной цепи на частоте $k\omega_1$.

Суммируя результат воздействия на линейную систему всех гармоник, включая постоянную составляющую, получим

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{a_0}{2} K(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k\omega_1) K(k\omega_1) \cos[k\omega_1 t + \psi(k\omega_1)]. \quad (3.6)$$

Пример 3.1. Найти напряжение на выходе RC -цепи (рис. 3.1). Входной сигнал определен рядом Фурье (3.5).

Решение. Коэффициент передачи линейной цепи на частоте $k\omega_1$ имеет вид

$$K(jk\omega_1) = \sqrt{\frac{1}{1 + (k\omega_1 RC)^2}} e^{j\varphi_k(k\omega_1)},$$

где $\varphi_k(k\omega_1) = -\arctg(k\omega_1 RC)$.

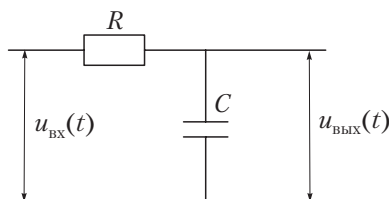


Рис. 3.1. RC -цепь

Подставляем выражение для коэффициента передачи в формулу (3.6):

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k\omega_1) |K(jk\omega_1)| \cos[k\omega_1 t + \varphi(k\omega_1) + \varphi_k(k\omega_1)] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(k\omega_1)}{\sqrt{1 + (k\omega_1 RC)^2}} \cos[k\omega_1 t + \varphi(k\omega_1) + \varphi_k(k\omega_1)]. \end{aligned}$$

3.2.2. Линейное преобразование непрерывной спектральной плотности

Пусть оператор линейного преобразования сигнала задан в виде интеграла Дюамеля

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad (3.7)$$

где $h(t - \tau)$ — импульсная характеристика линейной цепи с аргументом $t - \tau$.

Эта характеристика связана с коэффициентом передачи линейной цепи обратным преобразованием Фурье:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Спектральную плотность входного сигнала найдем, применяя прямое преобразование Фурье:

$$S_{\text{вх}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Спектральная плотность выходного сигнала

$$\begin{aligned} S_{\text{вых}}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вых}}(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau)h(t-\tau)e^{-j\omega t} dt d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-j\omega x} dx = S_{\text{вх}}(j\omega)K(j\omega), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $S_{\text{вх}}(j\omega)$ — спектральная плотность входного сигнала; $K(j\omega)$ — коэффициент передачи линейной цепи, связанный с ее импульсной характеристикой прямым преобразованием Фурье.

При вычислении двойного интеграла аргумент импульсной характеристики $(t - \tau)$ заменен переменной x .

Из анализа формул (3.7), (3.8) следует вывод: свертке функций $u(t)$, $h(t)$ во временной области соответствует произведение спектральной плотности входного сигнала и коэффициента передачи линейной цепи в частотной области.

Формула (3.8) часто применяется для анализа линейных цепей. Она содержит простую алгебраическую операцию умножения спектральной плотности входного сигнала на коэффициент передачи цепи.

Пример 3.2. Заданы сигнал $u_{\text{вх}}(t)$, его спектральная плотность $S_{\text{вх}}(j\omega)$ и коэффициент передачи линейной цепи $K(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$.

Найти спектральную плотность сигнала на выходе цепи и соответствующую этой плотности временную функцию.

Решение. Применяем формулу (3.8):

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = S_{\text{вх}}(j\omega)K(j\omega) = S_{\text{вх}}(j\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

Выходной сигнал найдем по формуле обратного преобразования Фурье:

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вых}}(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(j\omega)e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} = u_{\text{вх}}(t - t_0).$$

Линейная цепь передает входной сигнал без изменения его формы, но со сдвигом во времени, равным t_0 . Эта линейная цепь называется *идеальной линией задержки*.

3.2.3. Преобразование дискретного спектра параметрической цепью

При параметрическом преобразовании спектр на выходе параметрической цепи существенно отличается от спектра на входе за счет появления новых составляющих.

Если функции $\Phi(t)$ и $u_{\text{вх}}(t)$, входящие в формулу (3.3), разложить в ряды Фурье

$$\Phi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t), \quad (3.9)$$

$$u_{\text{вх}}(t) = \frac{d_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (d_k \cos k\omega_1 t + q_k \sin k\omega_1 t), \quad (3.10)$$

то дискретный спектр сигнала на выходе параметрической цепи можно найти умножением функции $\Phi(t)$ на функцию $u_{\text{вх}}(t)$ и выделением из произведения постоянной составляющей, первой, второй, третьей и т.д. гармоник.

Задача упрощается, если хотя бы один из рядов (3.9), (3.10) содержит конечное и сравнительно небольшое число членов.

Пример 3.3. В параметрической цепи на рис. 3.2 коэффициент передачи изменяется по закону, показанному на рис. 3.3. Найти дискретный спектр на выходе параметрической цепи, если амплитуда и частота входного гармонического сигнала равны A , $\omega_1 = 2\pi/T$.

Решение. Используя результат, полученный в примере 2.1, запишем

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}} \cos k\omega_1 t,$$

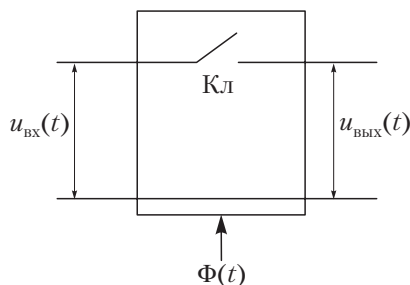


Рис. 3.2. Параметрическая цепь

$$\begin{aligned}
 u_{\text{вых}}(t) &= \Phi(t) A \cos \omega_1 t = \\
 &= \frac{A}{2} \cos \omega_1 t + \frac{A}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}} [\cos(k-1)\omega_1 t + \cos(k+1)\omega_1 t] = \\
 &= \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \cos \omega_1 t + \frac{2A}{3\pi} \cos 2\omega_1 t - \frac{A}{3\pi} \cos 4\omega_1 t + \dots
 \end{aligned}$$

3.2.4. Преобразование спектральной плотности параметрической цепью

Пусть для функций $\Phi(t)$ и $u_{\text{вх}}(t)$, входящих в выражение (3.3), можно найти их спектральные плотности. Тогда спектральная плотность на выходе параметрической цепи определяется сверткой (2.51) этих плотностей.

Пример 3.4. Для параметрической цепи, схема которой показана на рис. 3.2, найти спектральную плотность сигнала на ее выходе, если на входе действует сигнал $u_{\text{вх}}(t)$, спектральная плотность которого равна $S_{\text{вх}}(j\omega)$.

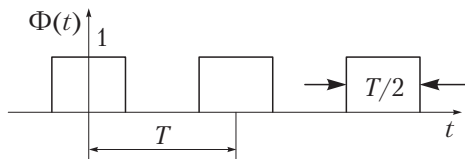


Рис. 3.3. Изменение коэффициента передачи параметрической цепи во времени

Закон изменения коэффициента передачи показан на рис. 3.3. Функция $\Phi(t)$ периодическая с периодом T .

Решение. Найдем спектральную плотность функции $\Phi(t)$, которая является периодической, определяемой рядом Фурье. Этот ряд, в свою очередь, определяется постоянной составляющей и тригонометрическими функциями типа $\sin x$, $\cos x$, для которых условие абсолютной интегрируемости не выполняется. Вычислим спектральные плотности этих функций, используя выражение (П.1.3) для дельта-функции в частотной области (см. приложение 1).

Для функции $\cos \omega_0 t$ спектральная плотность

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 t e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{j(\omega_0 - \omega)t} + e^{j(-\omega_0 - \omega)t}] dt = \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)], \quad (3.11) \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mp j(\omega - \omega_0)t} dt &= \delta(\omega - \omega_0), \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mp j(\omega + \omega_0)t} dt &= \delta(\omega + \omega_0). \end{aligned}$$

Аналогично вычислим спектральную плотность функций $\sin \omega_0 t$ и $a_0/2$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega_0 t e^{-j\omega t} dt = j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]; \quad (3.12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_0}{2} e^{-j\omega t} dt = \pi a_0 \delta(\omega). \quad (3.13)$$

Запишем функцию $\Phi(t)$ в виде ряда Фурье:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}} \cos k\omega_1 t,$$

где $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$.

Спектральную плотность этой функции вычислим с применением формул (3.11) и (3.13):

$$\begin{aligned} S_{\Phi}(j\omega) &= \pi\delta(\omega) + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}} [\delta(\omega - k\omega_1) + \delta(\omega + k\omega_1)] = \\ &= \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}} \delta(\omega - k\omega_1). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Применяя формулу (2.51), найдем спектральную плотность сигнала на выходе параметрической цепи:

$$\begin{aligned} S_{\text{ВЫХ}}(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ВХ}}(jz) S_{\Phi}[j(\omega - z)] dz = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ВХ}}(jz) \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}} \delta[(\omega - k\omega_1 - z)] dz = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}} S_{\text{ВХ}}[j(\omega - k\omega_1)]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.2.5. Безынерционное преобразование дискретного спектра

Рассмотрим задачу преобразования спектра нелинейной системой. Эта задача разбивается на две: преобразование спектра безынерционной частью и преобразование спектра линейной частью системы. При этом нелинейная система разбивается на безынерционную и инерционную части так, как показано на рис. 3.4. Подобное разбиение оказывается оправданным потому, что значительное число преобразований сигналов содержит эти части.



Рис. 3.4. Структурная схема нелинейной системы:
1 — безынерционная часть; 2 — линейная часть

К числу устройств, явно содержащих инерционную и безынерционную части, относятся выпрямители, умножители частоты, модуляторы, детекторы и др.

Инерционная часть является линейным четырехполюсником, а безынерционная часть нелинейна и определяется нелинейным уравнением, которое явно не содержит времени. При этом за изменением входного сигнала мгновенно следует изменение выходного.

В отличие от линейной, оператор L безынерционной системы не содержит членов, соответствующих операциям дифференцирования, интегрирования и временного сдвига.

Задача безынерционного преобразования спектра сигнала формулируется следующим образом. Для заданного спектра на входе и при заданном операторе нелинейного преобразования найти выходной спектр.

При нелинейном преобразовании, так же как и при параметрическом, выходной спектр существенно отличается от входного за счет появления новых спектральных составляющих.

Для входного дискретного спектра рассмотрим несколько случаев преобразования.

1. Нелинейный оператор задан **полиномом**:

$$L[u_{\text{вх}}(t)] = c_0 + c_1 u_{\text{вх}}(t) + c_2 u_{\text{вх}}^2(t) + \dots \quad (3.16)$$

При дискретном спектре входного сигнала его выражение во временной области можно записать или в виде ряда Фурье, или в виде суммы некоторого числа гармонических колебаний. Сложность решения задачи определяется количеством удерживаемых членов полинома (3.16) и числом гармонических составляющих входного сигнала. Решение задачи сводится к подстановке выражения для входного сигнала в формулу (3.16) и приведения результата к сумме постоянной и гармонических составляющих.

Пример 3.5. Для заданного входного сигнала

$$u_{\text{вх}}(t) = u_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + u_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (3.17)$$

и оператора нелинейного преобразования типа (3.16) найти дискретный спектр сигнала на выходе нелинейного безынерционного преобразователя.

Решение. Сигнал (3.17) называется *бигармоническим*. Выходной сигнал получим, подставив формулу (3.17) в (3.16):

$$u_{\text{вых}}(t) = c_0 + c_1 [u_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + u_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)] +$$

$$\begin{aligned}
& + c_2[u_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + u_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)]^2 = c_0 + 0,5c_2 u_1^2 + 0,5c_2 u_2^2 + \\
& + c_1 u_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + c_1 u_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + 0,5c_2 u_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\varphi_1) + \\
& + 0,5c_2 u_2^2 \cos(2\omega_2 t + 2\varphi_2) + c_2 u_1 u_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2] + \\
& + c_2 u_1 u_2 \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2].
\end{aligned}$$

Проанализируем полученный в примере 3.5 результат. На выходе содержится гораздо большее число гармонических составляющих, чем на входе. Кроме того, на выходе присутствует постоянная составляющая, которой нет на входе. Гармонические составляющие на выходе имеют частоты вида $n\omega_1$, и $m\omega_1$, где n, m — целые числа, а также частоты $n\omega_1 \mp m\omega_2$.

Гармонические составляющие с частотами $n\omega_1 \mp m\omega_2$ называются *комбинационными колебаниями*. Число $p = |n| + |m|$ называется *порядком комбинационного колебания*. В примере 3.5 $p = 2$.

Обогащение спектра выходного сигнала новыми гармоническими составляющими является характерным свойством нелинейной цепи.

2. Нелинейный оператор задается *кусочно-линейной функцией*.

Пусть характеристика нелинейного элемента (рис. 3.5, а) определяется выражением

$$i = \begin{cases} 0 & \text{при } u < u_0, \\ i_{\pi} + su & \text{при } u > u_0. \end{cases}$$

На вход нелинейного элемента подается напряжение (рис. 3.5, б)

$$u = E + V \cos \omega t. \quad (3.18)$$

Амплитуда входного колебания V больше разности $|u_0 - E|$. При выполнении этого условия во входной цепи происходит ограничение гармонического колебания. Угол θ называется *углом отсечки*. Импульсы тока на выходе нелинейного элемента определяются следующими уравнениями:

$$i = \begin{cases} i_{\pi} + su, & 0 \leq \omega t \leq \theta, \\ 0, & \theta < \omega t < 2\pi - \theta, \\ i_{\pi} + su, & 2\pi - \theta \leq \omega t < 2\pi. \end{cases} \quad (3.19)$$

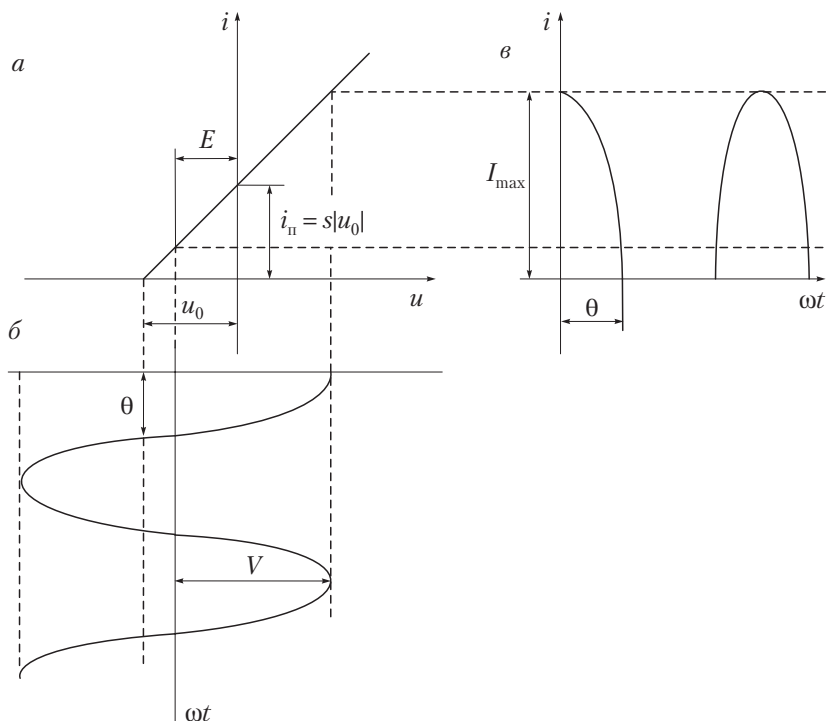


Рис. 3.5. Диаграммы, поясняющие метод угла отсечки

Подставляя выражение (3.18) в уравнения (3.19), получим

$$i = i_{\pi} + sE + sV \cos \omega t, \quad (3.20)$$

$$0 = i_{\pi} + sE + sV \cos \theta. \quad (3.21)$$

Вычтем из уравнения (3.20) уравнение (3.21). В результате получим

$$i = sV(\cos \omega t - \cos \theta). \quad (3.22)$$

Из (3.21) определяем

$$\cos \theta = -(E + |u_0|)/V.$$

Максимальное значение тока находим из (3.22):

$$I_{\max} = sV(1 - \cos \theta).$$

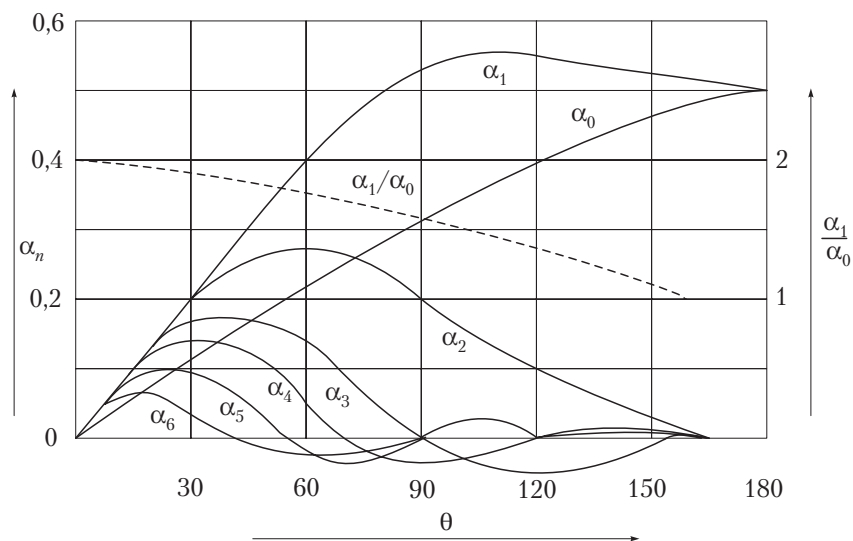


Рис. 3.6. Зависимость коэффициентов Берга от угла отсечки

Найдем амплитуду тока первой гармоники, применяя разложение периодической последовательности импульсов (рис. 3.5, в) в ряд Фурье (2.11):

$$I_1 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i(\omega t) \cos \omega t dt = \frac{2}{\omega T} \int_{-\theta}^{\theta} i(\varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{sV}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta).$$

Нормированное значение тока

$$\frac{I_1}{I_{\max}} = \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\pi(1 - \cos \theta)} = \alpha_1(\theta).$$

Аналогично находятся отношения $I_0/I_{\max} = \alpha_0(\theta)$, $I_2/I_{\max} = \alpha_2(\theta)$ и т.д. Коэффициенты $\alpha_0(\theta)$, $\alpha_1(\theta)$, $\alpha_2(\theta)$, ... называются *коэффициентами Берга*. Графики зависимостей α_n , $n = 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 6$, приведены на рис. 3.6. Они позволяют найти значения амплитуд гармоник при заданном угле отсечки.

Пример 3.6. Для заданного значения тока $I_{\max}$ и угла отсечки $\theta = 60^\circ$ найти амплитуды первой и второй гармоник на выходе нелинейного преобразователя.

Решение. Пользуясь графиком для коэффициентов Берга, находим: $\alpha_1 = 0,4$, $\alpha_2 = 0,26$.

Амплитуды первой и второй гармоник

$$I_1 = I_{\max} \alpha_1 = 0,4 I_{\max},$$

$$I_2 = I_{\max} \alpha_2 = 0,26 I_{\max}.$$

3. Нелинейный оператор задан *экспоненциальной функцией*. Если характеристика нелинейного элемента аппроксимируется экспонентой или экспоненциальным полиномом, то задача анализа упрощается.

Например, если нелинейная функция преобразователя равна $e^{a \cos x}$, то ее можно записать в виде следующего ряда Фурье:

$$e^{a \cos x} = I_0(a) + 2I_1(a) \cos x + 2I_2(a) \cos 2x + \dots \quad (3.23)$$

Аналогично функцию $e^{a \sin x}$ можно записать в виде ряда

$$e^{a \sin x} = I_0(a) + 2I_2(a) \cos 2x + 2I_4(a) \cos 4x + \dots + \\ + 2I_1(a) \sin x + 2I_3(a) \sin 3x \dots \quad (3.24)$$

Коэффициентами рядов Фурье в выражениях (3.23), (3.24) являются модифицированные функции Бесселя. Это табличные функции, которые приводятся в справочниках по математике.

Пример 3.7. Для заданной характеристики нелинейного элемента

$$i = f(u) = i_n e^{au}$$

и входного напряжения

$$u = V \cos \omega t$$

найти ток на выходе нелинейного элемента.

Решение. Применяем формулу (3.23):

$$i = i_n e^{aV \cos \omega t} = i_n [I_0(aV) + 2I_1(aV) \cos \omega t + 2I_2(aV) \cos 2\omega t + \dots].$$

3.2.6. Безынерционное преобразование спектральной плотности

Рассмотрим случай, когда на входе задана спектральная плотность сигнала. Найдем спектральную плотность на выходе, используя полином (3.16):

$$\begin{aligned} S_{\text{вых}}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} [c_0 + c_1 u_{\text{вх}}(t) + c_2 u_{\text{вх}}^2(t) + \dots] e^{-j\omega t} dt = c_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt + \\ &+ c_1 \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(t) e^{-j\omega t} dt + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}^2(t) e^{-j\omega t} dt + \dots = \\ &= 2\pi c_0 \delta(\omega) + c_1 S_{\text{вх}}(j\omega) + c_2 S_{\Pi}(j\omega) + \dots \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt$ — дельта-функция; $S_{\text{вх}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(t) e^{-j\omega t} dt$ — спектральная плотность входного сигнала; $S_{\Pi}(j\omega)$ — спектральная плотность произведения двух одинаковых сигналов $u_{\text{вх}}(t)$, вычисленная по формуле (2.51).

Проанализируем полученное выражение (3.25). Спектральная плотность выходного сигнала дискретно-непрерывная, хотя спектральная плотность входного сигнала дискретных составляющих не имеет. Спектральная плотность, соответствующая квадратичному члену полинома (3.16), находится как спектральная плотность произведения двух одинаковых входных сигналов. Если бы полином содержал кубический член, то соответствующая спектральная плотность была бы найдена по свертке спектральной плотности входного сигнала $S_{\text{вх}}(j\omega)$ и найденной спектральной плотности произведения $u_{\text{вх}}(t)u_{\text{вх}}(t)$.

Пример 3.8. Вычислить спектральную плотность на выходе безынерционной части нелинейной системы. Нелинейный оператор задан полиномом второй степени (3.16), а входной сигнал

$$u_{\text{вх}}(t) = 2F_{\text{в}} \frac{\sin \omega_{\text{в}} t}{\omega_{\text{в}} t}.$$

Решение. Спектральную плотность входного сигнала найдем с использованием результата, полученного в примере 2.5:

$$S_{\text{вх}}(j\omega) = 1, \quad -\omega_{\text{в}} \leq \omega \leq \omega_{\text{в}}.$$

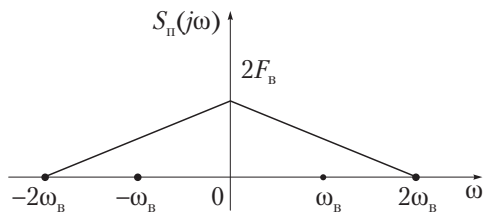


Рис. 3.7. Свертка спектров

Свертка спектров

$$\begin{aligned}
 S_{\Pi}(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{BX}}(jz) S_{\text{BX}}[j(\omega - z)] dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B + \omega}^{\omega_B} dz = \\
 &= \frac{1}{2\pi} (2\omega_B - \omega) = 2F_B \left(1 - \frac{\omega}{2\omega_B} \right).
 \end{aligned}$$

График свертки показан на рис. 3.7.

Сигнал на выходе безынерционной части нелинейной системы

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = c_0 + c_1 u_{\text{ВХ}}(t) + c_2 u_{\text{ВХ}}^2(t).$$

Его спектральная плотность

$$\begin{aligned}
 S_{\text{ВЫХ}}(j\omega) &= c_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt + c_1 \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ВХ}}(t) e^{-j\omega t} dt + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) e^{-j\omega t} dt = \\
 &= 2\pi c_0 \delta(\omega) + c_1 S_{\text{ВХ}}(j\omega) + c_2 2F_B \left(1 - \frac{\omega}{\omega_B} \right).
 \end{aligned}$$

На рис. 3.8. показаны составляющие спектральной плотности выходного сигнала.

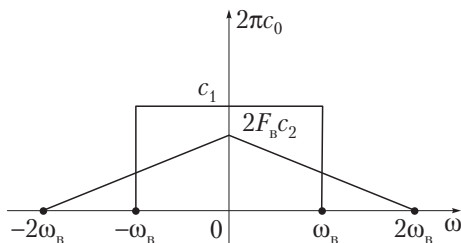


Рис. 3.8. Спектральная плотность выходного сигнала



3.3. Преобразование частоты. Модуляция и детектирование

3.3.1. Преобразование частоты

Под **преобразованием частоты** понимают процесс переноса без каких-либо искажений спектра сигнала в другую область частот.

Преобразование частоты применяют для размещения спектра сигнала в заданном участке диапазона частот канала связи, а также для повышения чувствительности и избирательности приемников супергетеродинного типа.

Принцип преобразования поясняется рис. 3.9, 3.10.

Сигнал на входе преобразователя зависит от времени и переносимого сигнала:

$$u_{\text{вх}}(t) = u[t, b(t)].$$

В множителе он умножается на сигнал гетеродина

$$u_{\text{г}}(t) = A_{\text{г}} \cos(\omega_{\text{г}} t + \varphi_{\text{г}}),$$

а затем фильтруется *полосовым фильтром*.

Входной сигнал может быть модулированным (непрерывно или дискретно) по амплитуде, фазе, несущей частоте. Пусть спектральная плотность любого модулированного сигнала состоит из спектральных компонент, сконцентрированных около частот $\mp\omega_0$ (рис. 3.10, а):

$$S_{\text{вх}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(t) e^{-j\omega t} dt = S[j(\omega + \omega_0)] + S[j(\omega - \omega_0)].$$

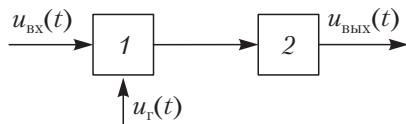


Рис. 3.9. Структурная схема преобразователя частоты:
1 — умножитель; 2 — полосовой фильтр

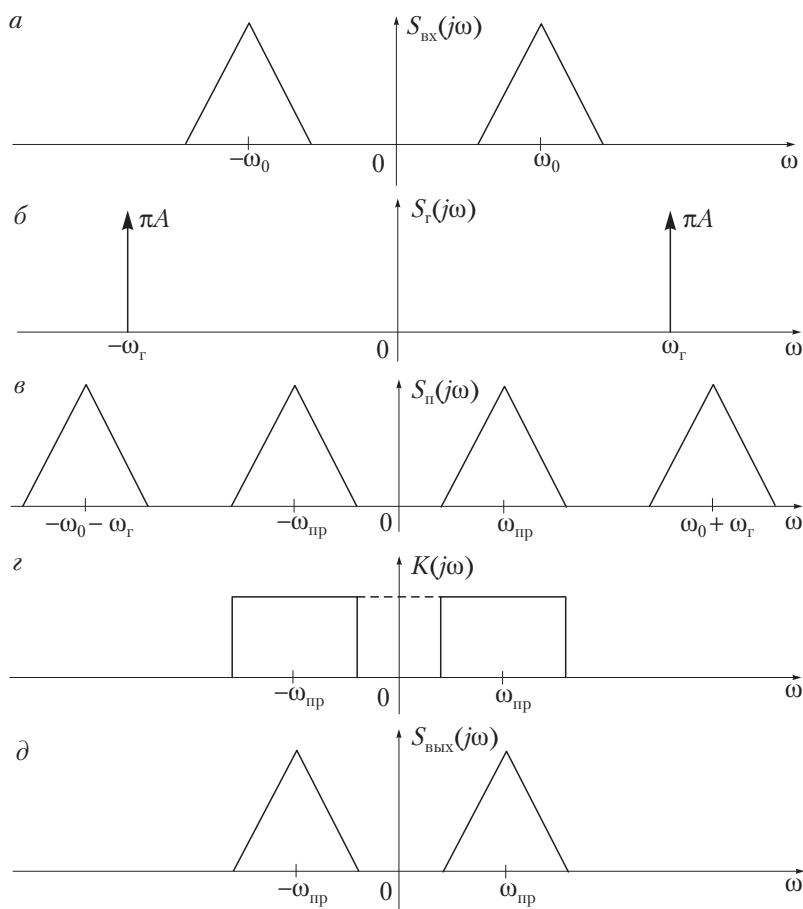


Рис. 3.10. Спектральные диаграммы, поясняющие работу преобразователя

Спектральная плотность характеризуется спектральной плотностью амплитуд и фазовой характеристикой. Если эти характеристики необходимы для соответствующих расчетов, нужно рассчитать их по формулам и представить в виде графиков.

В других случаях точные данные не требуются и спектральные плотности можно изображать произвольно: например, в виде колоколообразных спектров или треугольников для непрерывных спектральных плотностей или стрелками — для дискретных, как это делается в данной книге.

Вычислим спектральную плотность сигнала гетеродина, используя выражение (П.1.3) дельта-функции:

$$\begin{aligned}
 S_{\Gamma}(j\omega) &= A \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_{\Gamma}t + \varphi_{\Gamma}) e^{-j\omega t} dt = \\
 &= A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j(\omega_{\Gamma}t + \varphi_{\Gamma})} + e^{-j(\omega_{\Gamma}t + \varphi_{\Gamma})}}{2} e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \pi A [e^{j\varphi_{\Gamma}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_{\Gamma} - \omega)t} dt + e^{-j\varphi_{\Gamma}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(-\omega_{\Gamma} - \omega)t} dt] = \\
 &= \pi A [e^{j\varphi_{\Gamma}} \delta(\omega_{\Gamma} - \omega) + e^{-j\varphi_{\Gamma}} \delta(\omega_{\Gamma} + \omega)].
 \end{aligned}$$

Полагая $\varphi_{\Gamma} = 0$, получим

$$S_{\Gamma}(j\omega) = \pi A [\delta(\omega_{\Gamma} - \omega) + \delta(\omega_{\Gamma} + \omega)]. \quad (3.26)$$

Спектральная плотность гармонического косинусоидального колебания с нулевой начальной фазой (рис. 3.10, б) определяется произведением амплитуды этого колебания, увеличенной в π раз, и суммы двух дельта-функций, расположенных в точках частотной оси $\omega = \pm\omega_{\Gamma}$. Вычислим также спектральную плотность произведения входного сигнала и гетеродина по формуле (2.51):

$$\begin{aligned}
 S_{\Pi}(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(jz) S_{\Gamma}[j(\omega - z)] dz = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S[j(z + \omega_0)] + S[j(z - \omega_0)]\} \times \\
 &\times \{A\pi[\delta(\omega + \omega_{\Gamma} - z) + \delta(\omega - \omega_{\Gamma} - z)]\} dz = \\
 &= \frac{A}{2} \{S[j(\omega + \omega_{\Gamma} + \omega_0)] + S[j(\omega + \omega_{\Gamma} - \omega_0)] + \\
 &+ S[j(\omega - \omega_{\Gamma} + \omega_0)] + S[j(\omega - \omega_{\Gamma} - \omega_0)]\}, \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

где $\omega_{\Gamma} - \omega_0 = \omega_{\text{пр}}$ — промежуточная частота; $S_{\text{вх}}(j\omega)$, $S_{\Gamma}(j\omega)$ — спектральные плотности входного сигнала и гетеродина соответственно.

В спектральной плотности произведения, показанной на рис. 3.10, в, содержится полезный продукт преобразования (спектральные компоненты вблизи значений промежуточной частоты

$\omega = \mp\omega_{\text{пр}}$), а также мешающие компоненты вблизи частот $-\omega_0 - \omega_{\text{Г}}$, $\omega_0 + \omega_{\text{Г}}$.

Полезные компоненты (см. рис. 3.10, *в, з*) проходят на выход полосового фильтра, а мешающие существенно им ослабляются. Спектральные компоненты на выходе полосового фильтра (рис. 3.10, *д*) определяются выражением

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = S_{\text{п}}(j\omega)K(j\omega) = \frac{A}{2} \{S[j(\omega + \omega_{\text{пр}})] + S[j(\omega - \omega_{\text{пр}})]\},$$

если коэффициент передачи полосового фильтра $K(j\omega) = 1$ в заданной полосе частот. Они с точностью до постоянного множителя, равного $A/2$, совпадают со спектральными компонентами сигнала на его входе, а спектр преобразованного сигнала группируется около новых значений частот, равных $\omega = \mp\omega_{\text{пр}}$.

Преобразование частоты используется при модуляции и детектировании сигналов.

3.3.2. Модуляция

На рис. 3.11 приведены примеры носителей (переносчиков) сообщений. Гармонический сигнал $u(t, A, \omega_0, \varphi)$ — наиболее часто используемый носитель (рис. 3.11, *а, е*). Он определяется функцией времени, амплитуды, частоты и фазы.

В частотной области гармонический сигнал определяется спектральной плотностью $S_u(j\omega)$, представленной двумя дельта-функциями в точках $\omega = \pm\omega_0$. На рис. 3.11, *б, ж* показан другой носитель сообщения — периодическая последовательность видеоимпульсов. Он задан функцией времени и зависит от амплитуды A , длительности импульсов $\tau_{\text{и}}$ и периода T , т.е. $u_{\text{п}}(t) = u(t, A, \tau_{\text{и}}, T)$.

Спектральная плотность периодической последовательности импульсов (рис. 3.11, *ж*) содержит множество дельта-функций, расположенных в точках $\omega = k\omega_1$, $k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$. Вычисление спектральной плотности приведено в примере 2.4.

Носитель сообщения — постоянный ток не зависит от времени, т.е. сигнал $u_{\text{пт}}(t) = A$ (рис. 3.11, *в*). Спектральная плотность этого сигнала содержит единственную дельта-функцию в начале координат (рис. 3.11, *з*) и определяется формулой $2\pi A\delta(\omega)$.

В системах связи в качестве носителей сообщений применяются также сложные ШС.

Известные подклассы этих сигналов можно получить модуляцией направления постоянного тока (рис. 3.11, а) или модуляцией фазы гармонического носителя (рис. 3.11, д). Она производится заранее известной упорядоченной двоичной последовательностью нулей и единиц (см. п. 3.7.3). Это так называемая псевдослучайная последовательность (слово «псевдо» означает «почти»). Математическая модель ШС задается функцией, зависимой от времени, формы единичного импульса $u_0(t)$ и закона формирования двоичной последовательности $q(t)$:

$$u_{\text{ШС}}(t) = f[t, u_0(t), q(t)].$$

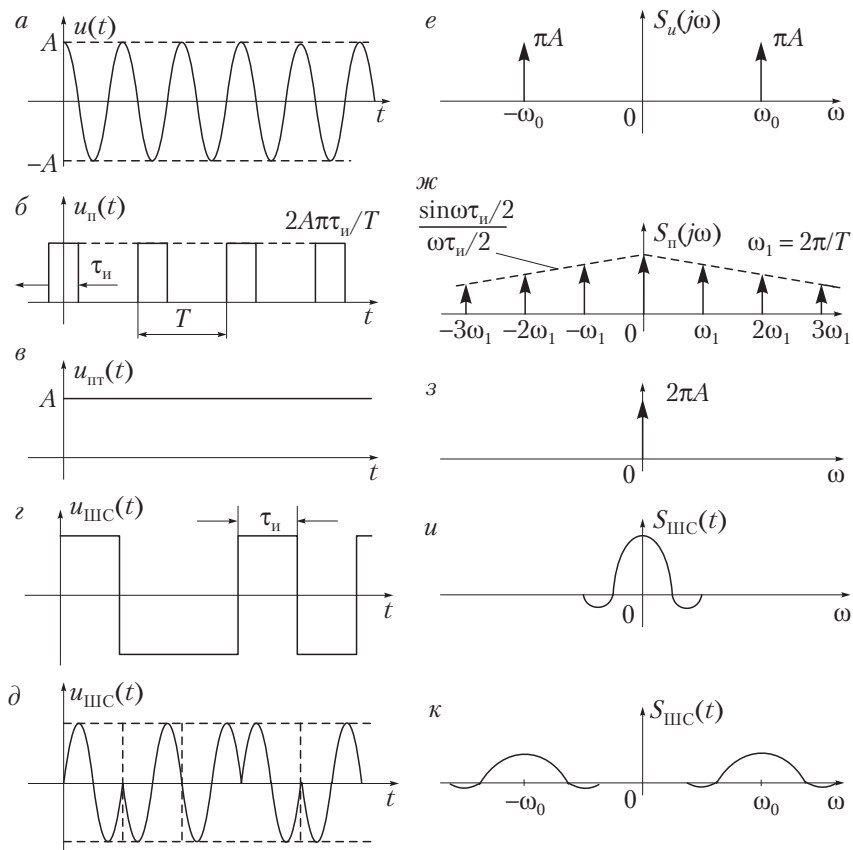


Рис. 3.11. Разновидности носителей сообщений

Соответствующие временным функциям (рис. 3.11, *з, д*) спектры ШС приведены на рис. 3.11, *и, к*.

Модулирующий сигнал (непрерывный или дискретный) и параметр носителя определяют вид модуляции.

Классификация различных видов модуляции приведена на рис. 3.12.

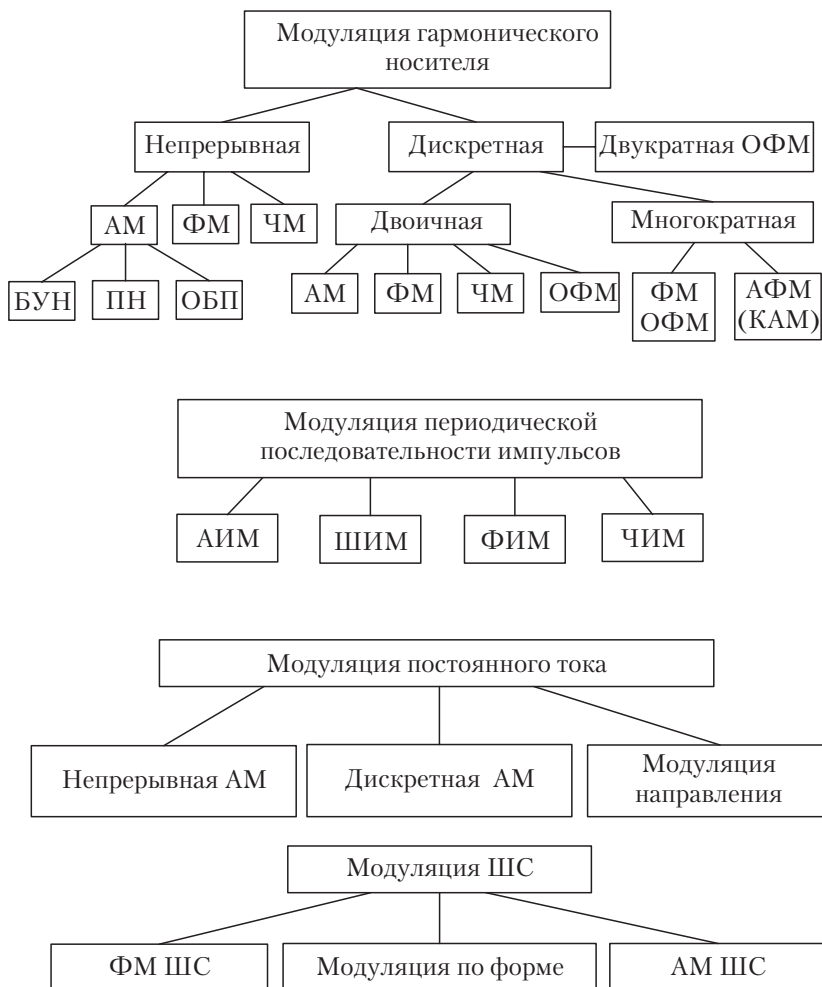


Рис. 3.12. Виды модуляций

Модуляцией амплитуды гармонического носителя аналоговым первичным сигналом получают амплитудную модуляцию с большим уровнем несущей (АМ-БУН) а также амплитудную модуляцию с подавленной несущей (АМ-ПН). На основе этих модулированных сигналов получают амплитудно-модулированные сигналы с одной боковой полосой (АМ-ОБП). Модуляцией частоты и фазы гармонического носителя получают соответственно ЧМ и ФМ. Модуляцией гармонического носителя дискретным модулирующим сигналом (кодовой комбинацией) получают двоичную АМ, двоичную ЧМ, двоичную ФМ, двоичную ОФМ, многопозиционную (многократную) фазовую и относительную фазовую модуляцию, амплитудно-фазовую модуляцию.

Модуляцией амплитуды, длительности импульсов, периода повторения периодической последовательности импульсов аналоговым первичным сигналом получают соответственно АИМ, ШИМ и ФИМ, связанную с ШИМ. ЧИМ получают в результате воздействия на частоту следования импульсов.

Изменением амплитуды постоянного тока получают непрерывную и дискретную АМ, а коммутацией знака тока — модуляцию его направления.

Модулируя амплитуду или фазу (знак) ШС информационной двоичной последовательностью, получают или АМ ШС, или ФМ ШС. Последний вид модуляции называется инверсной модуляцией ШС. Если при изменении кодового слова меняется форма ШС, то такая модуляция называется модуляцией ШС по форме. Амплитудная и фазовая модуляции шумоподобного сигнала являются частными случаями модуляции ШС по форме.

Вид модуляции и связанные с ней преобразования сигналов определяют **математическую модель модулятора**.

Задача модуляции формулируется следующим образом. Нужно так выбрать оператор L , чтобы его действие привело к формированию требуемого модулированного сигнала:

$$u[t, b(t)] = L[u_n(t, a_1, a_2, \dots, a_n)],$$

где $u_n(t, \bar{a})$ — носитель сообщения; $a_1, a_2, \dots, a_n$ — параметры носителя, один из которых модулируется; $b(t)$ — модулирующий сигнал.

Решение задачи связано с анализом модулированных сигналов и их спектров (спектральных плотностей). С целью отбора допу-

стимых решений вначале задают структуру модулятора (оператор L), входные сигналы и их спектры (спектральные плотности), затем проводят анализ полученных математических выражений для выходного сигнала и его спектра (спектральной плотности).

Спектральная плотность реального модулированного сигнала является случайной функцией

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u[t, b(t)] e^{-j\omega t} dt,$$

так как модулирующий сигнал $b(t)$ является случайным. Ее вычисление затруднено. Поэтому для упрощения анализа случайные функции заменяют детерминированными (например, гармоническими функциями $\sin x$, $\cos x$).

3.3.3. Детектирование

Детектированием (демодуляцией) называется процесс выделения модулирующего сигнала из принимаемого сигнала. Название детектирования определяется модулируемым параметром сигнала.

Задача детектирования формулируется следующим образом. Для заданного модулированного сигнала $u[t, b(t)]$ найти преобразование, однозначно определяющее модулирующий сигнал

$$b(t) = L\{u[t, b(t)]\}.$$

Под L здесь следует понимать не только линейное или нелинейное, но и параметрическое преобразование.

Основным методом исследования процессов, происходящих при детектировании, является анализ. При этом методе вначале задают оператор преобразования (или структурную схему детектора), а затем решают задачи преобразования сигналов и их спектров. Полученные результаты анализируют. На этой основе принимают решения о соответствии выбранной схемы и ее параметров заданным требованиям.

При выборе модуляции и демодуляции наряду с задачами анализа решают и задачи синтеза. Задачи синтеза сложнее задач анализа. Они формулируются следующим образом. Для заданных сигналов (спектров) на входе и выходе устройства требуется найти

схему и параметры его элементов. Из-за отсутствия достаточно разработанных математических методов не все задачи синтеза удастся довести до конца. Основные понятия синтеза систем и их отдельных частей приведены в гл. 9, примеры синтеза — в гл. 7.

3.4. Амплитудная модуляция гармонического переносчика

3.4.1. Модулирующие сигналы

Физические процессы, происходящие в модуляторах АМ сигналов, аналогичны процессам в преобразователях частоты. Поэтому АМ можно считать частным случаем этого преобразования.

Модуляцией гармонического носителя непрерывным модулирующим сигналом получают *непрерывный АМ сигнал*, а модуляцией дискретным сигналом — *дискретный АМ сигнал*. Наиболее часто встречающиеся разновидности модулирующих сигналов приведены на рис. 3.13.

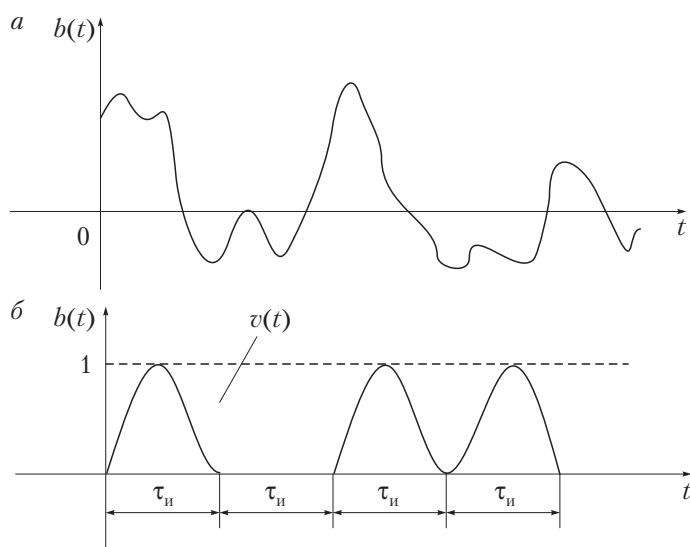


Рис. 3.13. Наиболее часто встречающиеся разновидности модулирующих сигналов при АМ

Значение непрерывного сигнала (рис. 3.13, *а*) является случайной величиной и в каждый момент времени принимает одно значение из определенного непрерывного множества. Дискретный сигнал определяется некоторой функцией $v(t)$ или равен нулю (см. рис. 3.13, *б*) в пределах единичного (тактового) интервала времени. Появление импульса в заданном единичном интервале случайно и определено соответствующим элементом кодового слова — носителя передаваемой информации. Элементы кодового слова при АМ равны 0 или 1, т.е. принадлежат двоичному алфавиту. Поэтому эта разновидность дискретной модуляции называется *двоичной*.

Для упрощения анализа случайные модулирующие сигналы заменяют детерминированными. Если модуляция непрерывна, то в качестве модулирующего сигнала часто используют сигнал

$$b(t) = b_0 \cos \Omega t,$$

где b_0 — амплитуда; Ω — угловая частота.

При дискретной модуляции случайное кодовое слово заменяют некоторым заранее заданным двоичным числом.

3.4.2. Амплитудная непрерывная модуляция с подавленной несущей

Эта модуляция отличается тем, что в спектре модулированного сигнала нет составляющей на несущей частоте.

Модулированный сигнал определяется произведением модулирующего сигнала и гармонического сигнала-носителя:

$$u_{\text{АМ-ПН}}(t) = b(t) \cos \omega_0 t. \quad (3.28)$$

Структурная схема идеального модулятора весьма проста и состоит из умножителя. Других устройств эта схема не содержит и поэтому является наиболее экономичной. Однако при реализации операции умножения в реальную схему модулятора приходится вводить дополнительные блоки, что усложняет ее. Соответственно, усложняется и анализ такой схемы. Ограничимся анализом работы идеального модулятора.

Найдем спектральные плотности сигналов на входе и выходе модулятора, используя прямое преобразование Фурье. Спектральная плотность модулирующего сигнала (рис. 3.14, а, д)

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} b(t)e^{-j\omega t} dt.$$

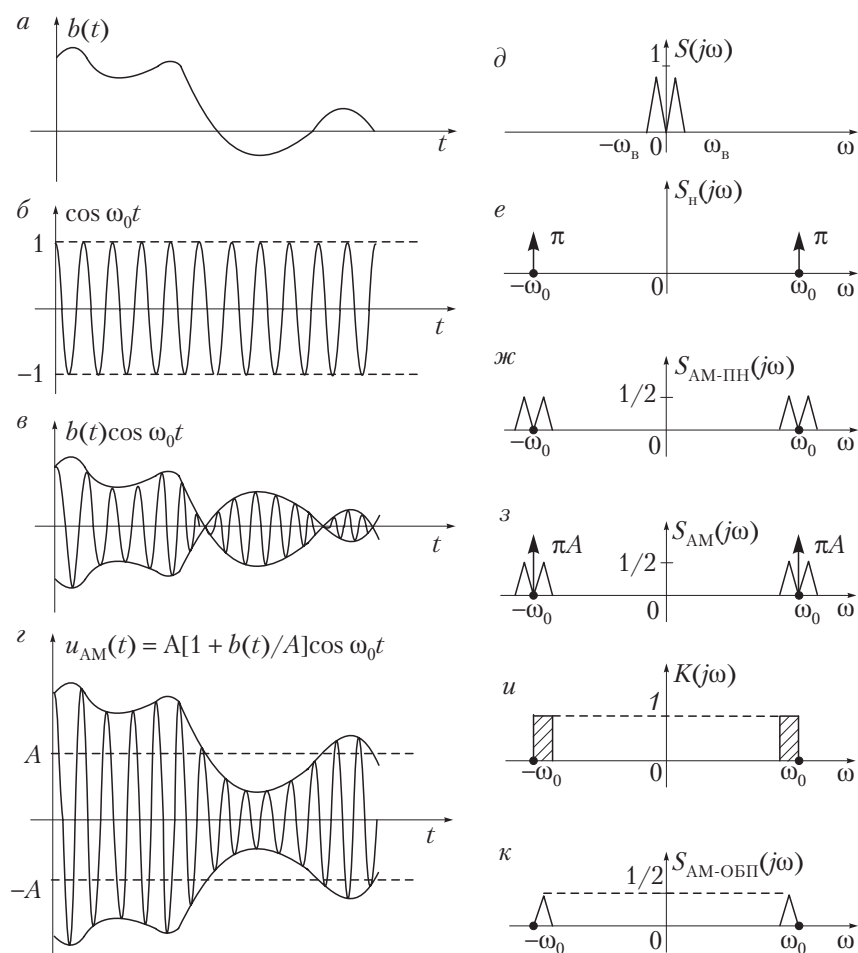


Рис. 3.14. Диаграммы, поясняющие процессы в модуляторах АМ сигналов

Спектральная плотность гармонического сигнала носителя сообщения (рис. 3.14, б, е)

$$S_n(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega_0 t e^{-j\omega t} dt = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (3.29)$$

Спектральная плотность АМ-ПН сигнала (рис. 3.14, в, ж) равна

$$S_{\text{АМ-ПН}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} b(t) \cos\omega_0 t e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} b(t) e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt + \\ + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} b(t) e^{-j(\omega_0 + \omega)t} dt = \frac{1}{2} \{S[j(\omega - \omega_0)] + S[j(\omega + \omega_0)]\}, \quad (3.30)$$

где $S(j\omega)$ — спектральная плотность модулирующего сигнала.

Спектральная плотность модулированного сигнала состоит из двух частей, сдвинутых по оси частот относительно спектральной плотности модулирующего сигнала на величину $\omega = \mp\omega_0$.

Как следует из выражения (3.30), амплитуды спектральных компонент модулированного сигнала в 2 раза меньше амплитуд спектральных компонент модулирующего сигнала. Поэтому если спектральная составляющая на нулевой частоте модулирующего сигнала равна $S(0)$, то составляющие спектра модулированного сигнала на частотах $\omega = \mp\omega_0$ равны $S(0)/2$. Это значит, что уровень несущей в исследуемом модуляторе определяется уровнем постоянной составляющей модулирующего сигнала. Если эта составляющая равна нулю, то и спектральные составляющие на частотах $\omega = \mp\omega_0$ также равны нулю.

При АМ-ПН спектральная плотность модулирующего сигнала переносится из области нулевой частоты в область более высоких частот, равных $\pm\omega_0$, с уменьшением амплитуд спектральных компонент в 2 раза без какого-либо растяжения или сжатия ее по оси частот. За счет этого ширина спектра АМ-ПН сигнала удваивается (см. рис. 3.14, д и 3.14, ж).

Под *шириной спектра* сигнала будем понимать интервал частот, расположенный в области их положительных значений, в пределах которого модуль спектральной плотности сигнала больше некоторого заданного уровня. Например, таким может быть уровень, взятый из интервала $[0,1S_{\text{max}}; 0,707S_{\text{max}}]$, где S_{max} — максимальное значение модуля спектральной плотности.

Ширина спектра $F_2 - F_1$ сигнала находится также по его спектральной плотности $S(j\omega)$ в области положительных частот из уравнения:

$$\int_{2\pi F_1}^{2\pi F_2} |S(j\omega)|^2 d\omega = c \int_0^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega,$$

где c — заданное положительное число, которое в зависимости от решаемой задачи составляет 0,9...0,99.

Этот критерий называется *энергетическим критерием*.

3.4.3. Амплитудная непрерывная модуляция с большим уровнем несущей

АМ-БУН сигнал равен сумме АМ-ПН сигнала и сигнала несущей $A \cos \omega_0 t$:

$$u_{\text{АМ}}(t) = b(t) \cos \omega_0 t + A \cos \omega_0 t = A[1 + b(t)/A] \cos \omega_0 t. \quad (3.31)$$

Функция (3.31) определяет структуру модулятора (рис. 3.15), который содержит минимальное число блоков (два умножителя и сумматор).

Спектральная плотность сигнала

$$S_{\text{АМ}}(j\omega) = A \int_{-\infty}^{\infty} [1 + b(t)/A] \cos \omega_0 t e^{-j\omega t} dt = S_{\text{н}}(j\omega) + S_{\text{АМ-ПН}}(j\omega),$$

где $S_{\text{н}}(j\omega)$ — спектральная плотность несущего колебания; $S_{\text{АМ-ПН}}(j\omega)$ — спектральная плотность АМ-ПН сигнала.

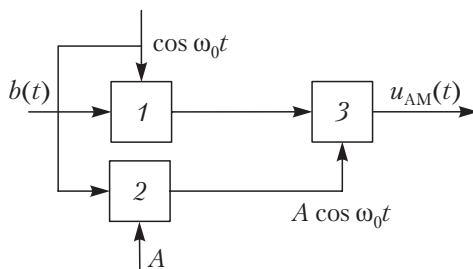


Рис. 3.15. Модулятор АМ сигнала:
1, 2 — умножители; 3 — сумматор

Спектральная плотность состоит из двух составляющих: спектральной плотности несущего колебания и спектральной плотности АМ-ПН сигнала (рис. 3.14, з, з). Поэтому спектральная плотность анализируемого сигнала сохраняет все свойства АМ-ПН сигнала. В частности, ширина его спектра определяется шириной спектра АМ-ПН сигнала, т.е. в 2 раза больше ширины спектра модулирующего сигнала.

Выберем в качестве модулирующего сигнала гармонический сигнал

$$b(t) = b_0 \cos(\Omega t + \theta),$$

где b_0 — амплитуда; Ω — частота; θ — начальная фаза.

Примем начальную фазу гармонического носителя равной φ . С учетом этого выражение (3.31) для АМ сигнала перепишем в виде

$$\begin{aligned} u_{\text{АМ}}(t) &= A \left[1 + \frac{b_0}{A} \cos(\Omega t + \theta) \right] \cos(\omega_0 t + \varphi) = \\ &= A[1 + m \cos(\Omega t + \theta)] \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \\ &+ \frac{Am}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi + \theta] + \frac{Am}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi - \theta], \quad (3.32) \end{aligned}$$

где $m = b_0/A$.

Число m называется *индексом амплитудной модуляции*. Этот индекс выбирают в пределах от 0 до 1. Если его выбрать больше 1, то в модуляторе возникнут искажения.

Данный режим называется *перемодуляцией*. Работа модулятора поясняется диаграммами на рис. 3.16 и рис. 3.17. На рис. 3.16, а приведен модулирующий косинусоидальный сигнал ($\theta = 0$), а его спектральная плотность — на рис. 3.17, а. На рис. 3.16, б показан носитель сообщения ($\varphi = 0$). Его спектральная плотность приведена на рис. 3.17, б. Диаграммы сигнала и его спектральной плотности приведены на рис. 3.16, в, г и рис. 3.17, в соответственно.

Для сигнала, записанного в виде (3.32), мощность несущего колебания $P_{\text{н}} = A^2/2$. Мощность боковой спектральной компоненты $P_{\text{б}} = A^2 m^2/8$. Общая мощность сигнала

$$P = \frac{A^2}{2} (1 + m^2/2).$$

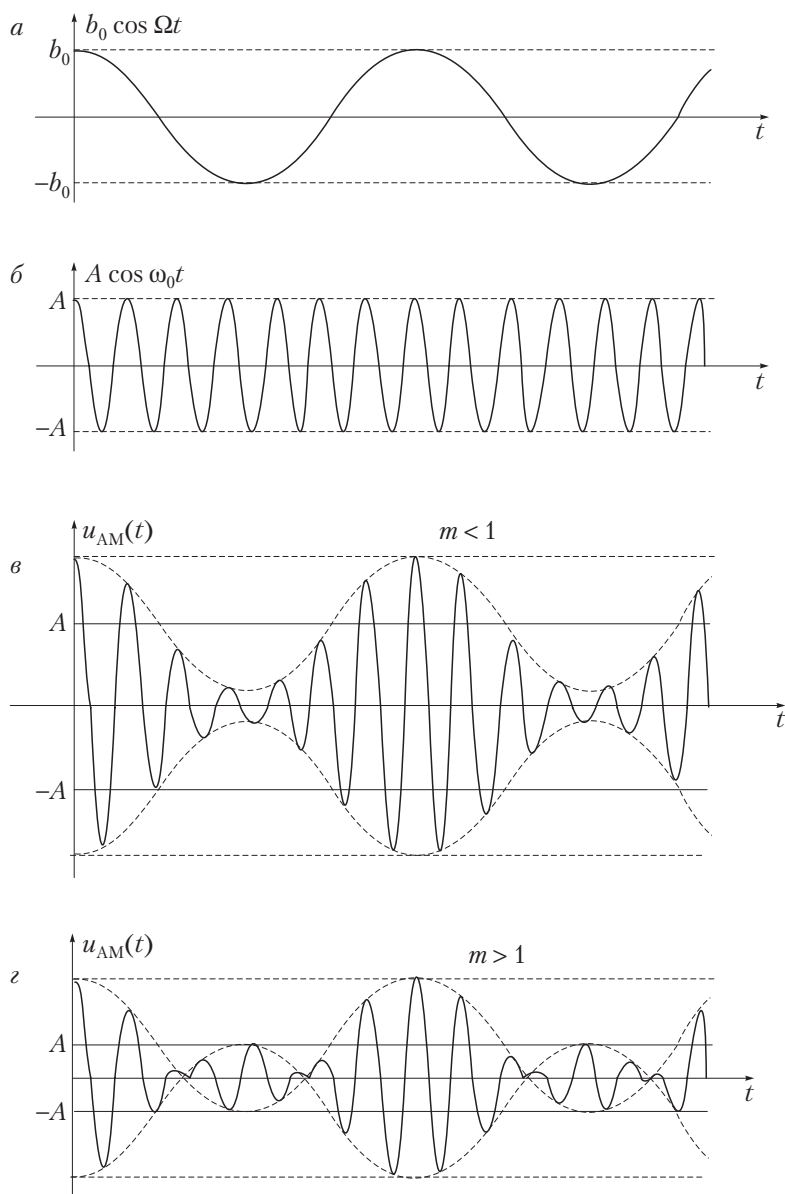


Рис. 3.16. Диаграммы, поясняющие работу амплитудного модулятора

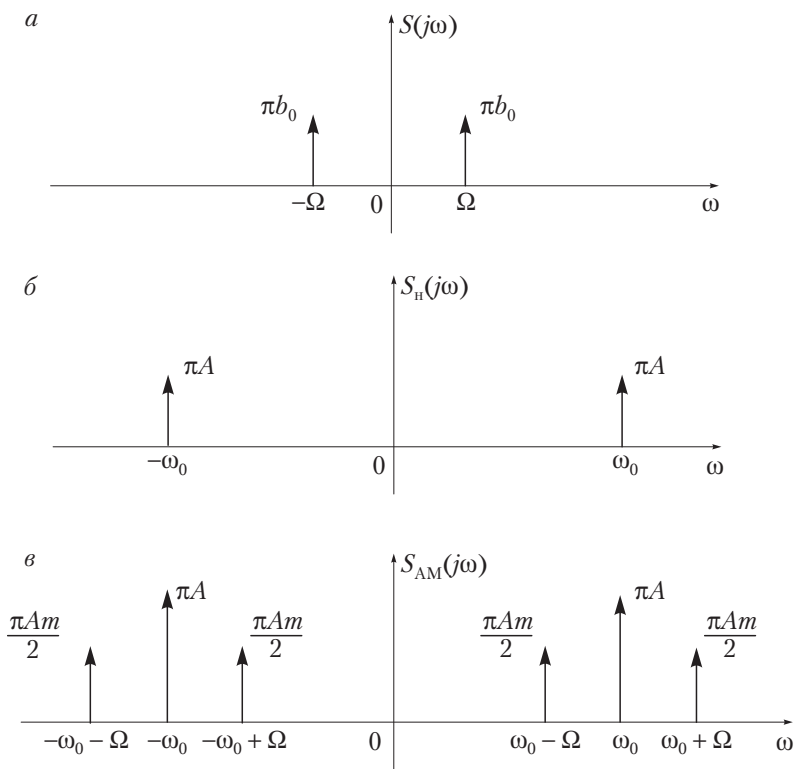


Рис. 3.17. Спектральные диаграммы, поясняющие работу амплитудного модулятора

Процентное содержание мощности боковых спектральных компонент определяется отношением

$$\eta(\%) = \frac{2P_6}{P} 100 \% = \frac{m^2}{2 + m^2} 100 \%.$$

Из приведенной формулы следует, что с уменьшением коэффициента АМ процентное содержание мощности боковых спектральных компонент уменьшается. Это означает, что даже при $m = 1$ около 67 % мощности источника питания бесполезно тратится на передачу несущей.

Несмотря на это, АМ с большим уровнем несущей нашла широкое применение в радиовещании.

3.4.4. Двоичная амплитудная модуляция

Двоичный АМ сигнал $u(t)$, полученный модуляцией гармонического носителя, показан на рис. 3.18, б. Этот сигнал определяется произведением двоичного модулирующего сигнала и сигнала — переносчика сообщения. Энергия двоичного АМ сигнала в пределах некоторого единичного интервала или не равна, или равна нулю. Такие сигналы называются *сигналами с пассивной паузой*.

Модулирующий двоичный сигнал

$$b(t) = \sum_{k=1}^n b_k v[t - (k-1)\tau_n], \quad (3.33)$$

где b_k — k -й элемент, равный 1 или 0 в двоичном кодовом слове длиной n ; $v(t)$ — форма импульса, из которого строится модулирующий сигнал.

При замене случайного двоичного слова на неслучайное нетрудно вычислить спектральную плотность полученного таким образом модулирующего сигнала:

$$\begin{aligned} S_b(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} b(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=1}^n b_k \int_{-\infty}^{\infty} v[t - (k-1)\tau_n] e^{-j\omega t} dt = \\ &= S_0(j\omega) \sum_{k=1}^n b_k e^{-j\omega(k-1)\tau_n}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где b_k — элемент двоичного числа; $S_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt$ — спектральная плотность импульса.

Для первого прямоугольного импульса (см. рис. 3.18, а) спектральная плотность

$$S_0(j\omega) = \tau_n \frac{\sin \frac{\omega \tau_n}{2}}{\frac{\omega \tau_n}{2}} e^{-j \frac{\omega \tau_n}{2}}. \quad (3.35)$$

Используя энергетический критерий (см. п. 3.4.2) и задавая значения $c = 0,9$, $F_1 = 0$, найдем ширину спектра этого импульса:

$$\Delta\omega_n = 2\pi/\tau_n.$$

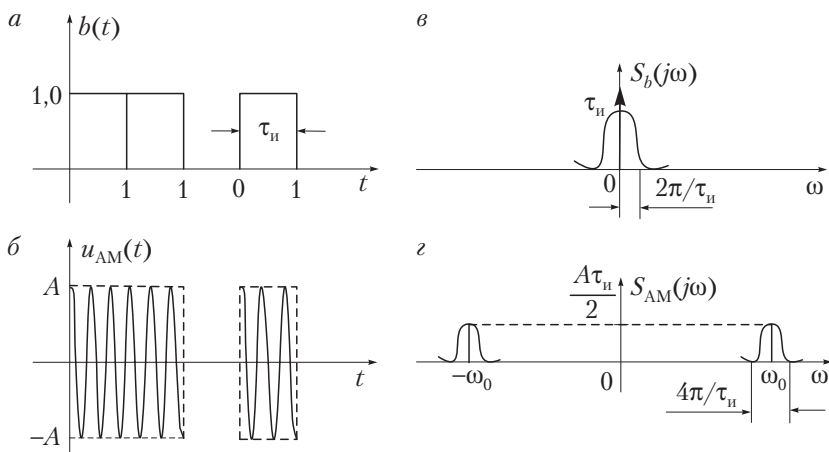


Рис. 3.18. Двоичный дискретный сигнал

Спектральная плотность двоичного АМ сигнала определяется сверткой соответствующих спектральных плотностей:

$$\begin{aligned}
 S_{AM}(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_b(jz) S_n[j(\omega - z)] dz = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(jz) \sum_{k=1}^n b_k e^{-jz(k-1)\tau_n} \pi A [\delta(\omega - z + \omega_0) + \delta(\omega - z - \omega_0)] dz = \\
 &= \frac{A}{2} \left\{ S_0[j(\omega + \omega_0)] \sum_{k=1}^n b_k e^{-j(\omega + \omega_0)(k-1)\tau_n} + \right. \\
 &\quad \left. + S_0[j(\omega - \omega_0)] \sum_{k=1}^n b_k e^{-j(\omega - \omega_0)(k-1)\tau_n} \right\}, \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

где $S_b(j\omega)$ — спектральная плотность модулирующего сигнала $b(t)$; $S_n(j\omega)$ — спектральная плотность носителя сообщения $A \cos \omega_0 t$.

При преобразовании модулирующего сигнала его спектральная плотность переносится из области нижних в область высоких частот без искажений спектральных составляющих (рис. 3.18, в, г).

Ширина спектра АМ сигнала равна $4\pi/\tau_n$.

3.4.5. Амплитудная модуляция с одной боковой полосой

Амплитудно-модулированный с одной боковой полосой сигнал (АМ-ОБП) часто получают полосовой фильтрацией непрерывного АМ сигнала (см. рис. 3.14, з, э).

АМ-ОБП сигнал называется также *однополосным АМ сигналом*. Спектральная плотность АМ-ОБП сигнала с нижней боковой полосой находится в области частот от $-\omega_0$ до $+\omega_0$, а с верхней боковой полосой — в области частот от $-\infty$ до $-\omega_0$ и от ω_0 до $+\infty$.

Структурная схема модулятора сигнала включает модулятор АМ сигнала и полосовой фильтр, пропускающий или задерживающий несущую частоту и настроенный на нижнюю или верхнюю боковую полосу (рис. 3.19).

Например, спектральная плотность непрерывного АМ-ОБП сигнала с нижней боковой полосой и несущей

$$S_{\text{АМ-ОБП}}(j\omega) = S_{\text{АМ}}(j\omega)K(j\omega) = [S_{\text{н}}(j\omega) + S_{\text{АМ-ПН}}(j\omega)]K(j\omega), \quad (3.37)$$

где $K(j\omega)$ — коэффициент передачи полосового фильтра (см. рис. 3.14, и).

Подставим в (3.37) выражение (3.30) для спектральной плотности АМ-ПН сигнала. В результате получим

$$S_{\text{АМ-ОБП}}(j\omega) = \{S_{\text{н}}(j\omega) + 0,5S[j(\omega - \omega_0)] + 0,5S[j(\omega + \omega_0)]\}K(j\omega). \quad (3.38)$$

Найдем спектральную плотность непрерывного АМ-ОБП сигнала с нижней боковой полосой и подавленной несущей. Спектральные составляющие АМ-ПН сигнала выразим через нижнюю и верхнюю боковые полосы:

$$S_{\text{АМ-ПН}}(j\omega) = 0,5\{S[+j(\omega + \omega_0)] + S[-j(\omega - \omega_0)]\} + 0,5\{S[-j(\omega + \omega_0)] + S[+j(\omega - \omega_0)]\},$$

где $S(+j\omega) = S(j\omega)$, $\omega > 0$; $S(-j\omega) = S(j\omega)$, $\omega < 0$; $S(j\omega)$ — спектральная плотность модулирующего сигнала.



Рис. 3.19. Модулятор АМ-ОБП сигнала:
1 — модулятор; 2 — полосовой фильтр

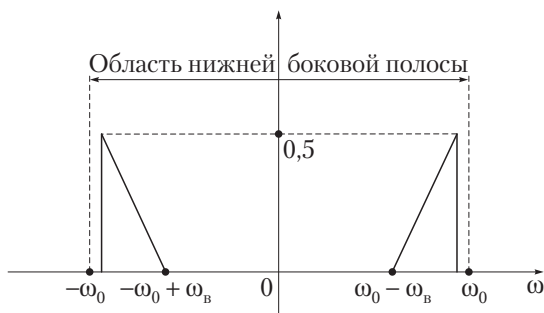


Рис. 3.20. Спектральная плотность АМ-ОБП сигнала

Полагая, что полосовой фильтр задерживает спектральные компоненты на несущей частоте и в области верхней боковой полосы, найдем

$$S_{\text{АМ-ОБП}}(j\omega) = \frac{1}{2} \{S[+j(\omega + \omega_0)] + S[-j(\omega - \omega_0)]\}. \quad (3.39)$$

Спектральная плотность АМ-ОБП сигнала содержит часть спектральных компонент АМ сигнала — его нижнюю полосу (рис. 3.20). Амплитуды спектральных составляющих АМ-ОБП сигнала в 2 раза меньше амплитуд спектральных компонент модулирующего сигнала. Ширина спектра АМ-ОБП сигнала равна ширине спектра модулирующего сигнала, т.е. в 2 раза меньше ширины АМ и АМ-ПН сигналов. При настройке полосового фильтра на верхние боковые полосы аналогично получают АМ-ОБП сигнал с верхней боковой полосой.

3.4.6. Векторное представление непрерывных амплитудно-модулированных сигналов

Кроме временного и спектрального описания непрерывных АМ сигналов, полезно использовать и их векторное представление (рис. 3.21).

Непрерывный АМ сигнал, представленный комплексной функцией времени, является вектором OB на рис. 3.21, *а*.

Действительная часть этой функции записывается в виде (3.32) и равна проекции вектора OB на ось x . Векторы EC , ED (рис. 3.21, *а*)

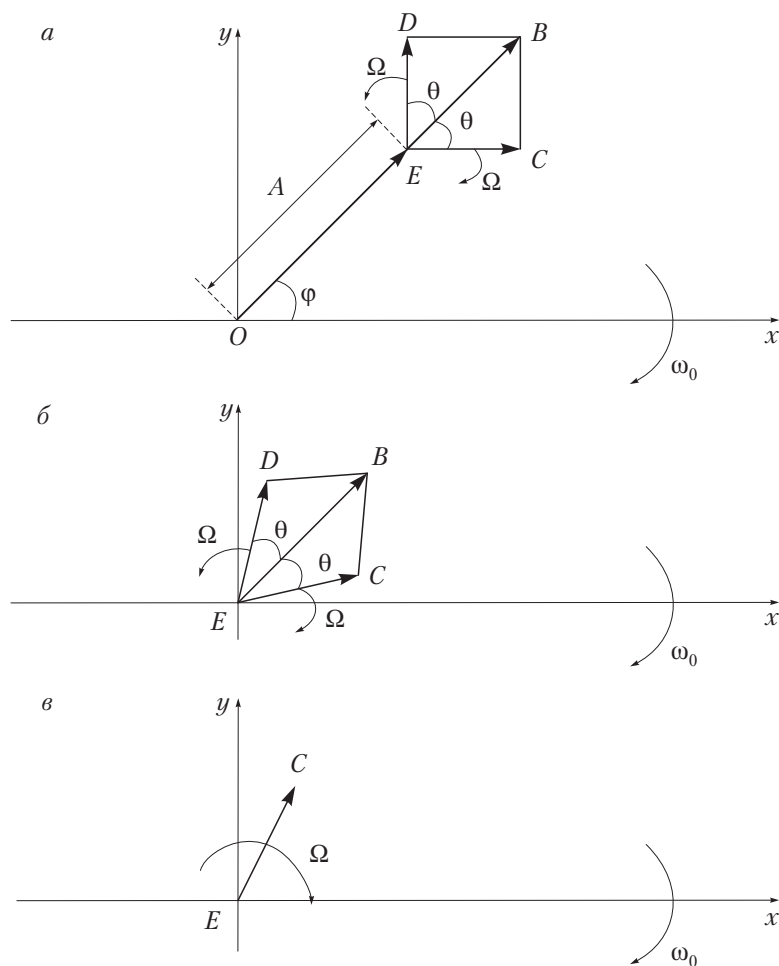


Рис. 3.21. Векторные диаграммы непрерывных АМ сигналов

вращаются с угловой скоростью Ω относительно точки E по направлениям, показанным стрелками. Вектор OB неподвижен на плоскости, а оси x, y вращаются относительно этого вектора с угловой скоростью ω_0 .

Векторная диаграмма для АМ-ПН сигнала приведена на рис. 3.21, *б*. Она отличается от векторной диаграммы АМ сигнала тем, что вектор OE равен нулю. Временное выражение для АМ-ПН

сигнала равно сумме второго и третьего слагаемых выражения (3.32). Векторная диаграмма АМ-ОБП сигнала приведена на рис. 3.21, в и содержит всего один вектор EC , вращающийся по отношению к точке E с угловой скоростью Ω . Временное выражение для АМ-ОБП сигнала определяется вторым слагаемым выражения (3.32).

3.5. Частотная модуляция гармонического переносчика

3.5.1. Непрерывный частотно-модулированный сигнал с малым индексом модуляции

Запишем сигнал в виде комплексной функции времени:

$$\dot{W}(t) = \vartheta(t)e^{j\theta(t)}, \quad (3.40)$$

где $\vartheta(t)$ — огибающая; $\theta(t)$ — мгновенная (текущая) фаза сигнала.

Действительная часть выражения (3.40)

$$\operatorname{Re} \dot{W}(t) = \vartheta(t) \cos \theta(t) \quad (3.41)$$

является обобщением косинусоидального сигнала с изменяющейся во времени амплитудой и фазой.

Производная от мгновенной фазы определяет мгновенную частоту этого сигнала:

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}.$$

Соответственно, мгновенная частота определяет и мгновенную фазу:

$$\theta(t) = \int \omega(t) dt.$$

Модуляция, при которой фаза $\theta(t)$ изменяется в зависимости от модулирующего сигнала $b(t)$, называется *угловой*.

Пусть при передаче информации частота сигнала изменяется по закону

$$\omega(t) = \omega_0 + 2\pi K b(t),$$

где K — коэффициент пропорциональности с размерностью $[\text{Гц/В}]$. В этом случае мгновенная фаза

$$\theta(t) = \int \omega(t) dt = \omega_0 t + 2\pi K \int b(t) dt. \quad (3.42)$$

Разновидность угловой модуляции, при которой частота сигнала изменяется пропорционально значению модулирующего сигнала, называется *частотной модуляцией* (ЧМ).

Если при передаче информации мгновенная фаза изменяется в соответствии с выражением

$$\theta(t) = \omega_0 t + 2\pi K_{\text{ФМ}} b(t), \quad (3.43)$$

то эта разновидность угловой модуляции называется *фазовой модуляцией* (ФМ).

В формуле (3.43) буквой $K_{\text{ФМ}}$ обозначен коэффициент пропорциональности, имеющий размерность $[1/\text{В}]$.

Огибающая сигнала $\vartheta(t)$ при угловых способах модуляции остается постоянной величиной — обозначим ее буквой A . Выражения для ЧМ и ФМ сигналов запишем в виде

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = A \cos[\omega_0 t + 2\pi K \int b(t) dt],$$

$$u_{\text{ФМ}}(t) = A \cos[\omega_0 t + 2\pi K_{\text{ФМ}} b(t)].$$

Сравнивая их, находим, что различие между ЧМ и ФМ сигналами незначительно.

Исследуем ЧМ сигнал при условии, что модулирующий сигнал $b(t) = b_0 \cos \Omega t$.

Его фазу определим из (3.42), полагая, что

$$\omega(t) = \omega_0 + 2\pi K b_0 \cos \Omega t = \omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t,$$

где $\Delta\omega = 2\pi K b_0$ — девиация частоты.

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \omega_0 t + (2\pi K b_0 / \Omega) \sin \Omega t = \omega_0 t + (\Delta\omega / \Omega) \sin \Omega t = \\ &= \omega_0 t + m_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t, \end{aligned} \quad (3.44)$$

где $m_{\text{ЧМ}} = \Delta\omega / \Omega$ — индекс частотной модуляции.

Подставив выражение (3.44) в формулу (3.40), получим выражение для ЧМ сигнала в комплексной форме:

$$\dot{W}_{\text{ЧМ}}(t) = A e^{j\omega_0 t} e^{jm_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t}. \quad (3.45)$$

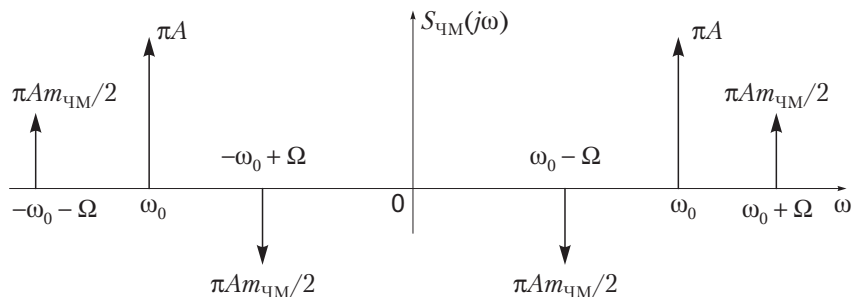


Рис. 3.23. Спектральная диаграмма ЧМ сигнала с малым индексом модуляции

Спектральная диаграмма ЧМ сигнала с малым индексом модуляции приведена на рис. 3.23.

Спектральные компоненты на частотах $\mp(\omega_0 - \Omega)$ у ЧМ сигнала повернуты на 180° по отношению к подобным компонентам для АМ сигнала (см. рис. 3.17, в).

3.5.2. Непрерывный частотно-модулированный сигнал с большим индексом модуляции

В математике доказывается, что функция

$$e^{jm_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t}$$

в интервале $[-\pi; \pi]$ раскладывается в ряд

$$e^{jm_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m_{\text{ЧМ}}) e^{jk\Omega t}, \quad (3.46)$$

где $J_k(m_{\text{ЧМ}})$ — функция Бесселя k -го индекса от аргумента $m_{\text{ЧМ}}$.

Подставляя формулу (3.46) в (3.45), получим

$$\dot{W}(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m_{\text{ЧМ}}) e^{j(\omega_0 + k\Omega)t}.$$

Действительная часть полученного выражения

$$\text{Re } \dot{W}(t) = u_{\text{ЧМ}}(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m_{\text{ЧМ}}) \cos(\omega_0 + k\Omega)t. \quad (3.47)$$

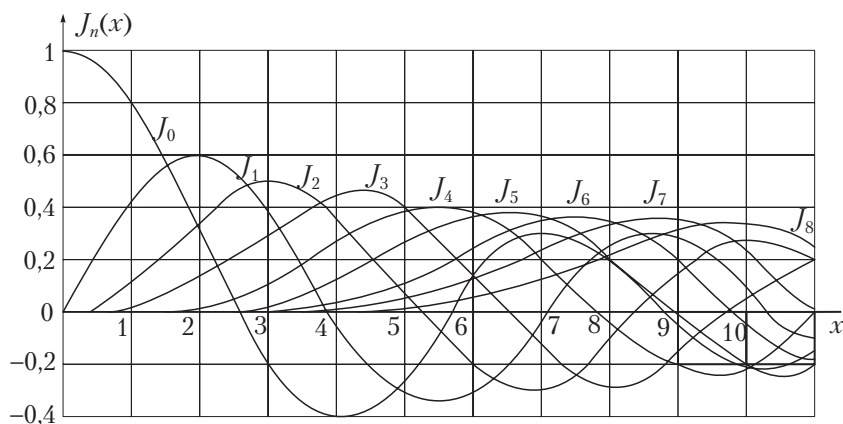


Рис. 3.24. Графики функций Бесселя

Из выражения (3.47) следует, что спектр ЧМ сигнала содержит бесконечное число компонент. Их амплитудные значения определяются функциями Бесселя, для которых выполняется условие

$$J_{-k}(m_{\text{ЧМ}}) = (-1)^k J_k(m_{\text{ЧМ}}). \quad (3.48)$$

Поэтому начальные фазы боковых колебаний с частотами $(\omega_0 + k\Omega)$, $(\omega_0 - k\Omega)$ совпадают, если k — четно, и отличаются на 180° , если k — нечетно.

Графики функций Бесселя приведены на рис. 3.24.

Обращаясь к амплитудному спектру ЧМ сигнала (рис. 3.25), отметим, что с ростом частоты амплитуды убывают. Установлено, что если $k \geq m_{\text{ЧМ}}$, то амплитуды гармоник практически равны нулю. Поэтому ширина спектра ЧМ сигнала

$$\Pi = 2m_{\text{ЧМ}}\Omega = 2\frac{\Delta\omega}{\Omega}\Omega = 2\Delta\omega, \quad (3.49)$$

где $\Delta\omega$ — девиация частоты.

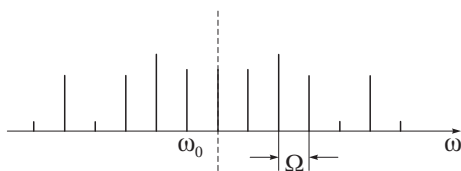


Рис. 3.25. Спектр амплитуд ЧМ сигнала

Для ЧМ сигнала с малым индексом модуляции ширина спектра $\Pi = 2\Omega$, т.е. такая же, как и для АМ сигнала.

3.5.3. Методы формирования непрерывного частотно-модулированного сигнала

В структурной схеме модулятора широкополосной ЧМ (рис. 3.26) вначале формируется сигнал

$$u(t) = A \cos[\omega_0 t + 2\pi K \int b(t) dt],$$

а затем в умножителе частоты он возводится в квадрат:

$$\begin{aligned} L[u(t)] &= A^2 \cos^2[\omega_0 t + 2\pi K \int b(t) dt] = \\ &= \frac{A^2}{2} [1 + \cos(2\omega_0 t + 4\pi K \int b(t) dt)]. \end{aligned}$$

При этом несущая частота увеличивается в 2 раза. В такое же число раз увеличивается и индекс частотной модуляции. Очевидно, что при многократном умножении индекс модуляции еще больше увеличивается.

Другой способ получения ЧМ сигнала связан с воздействием модулирующего сигнала $b(t)$ на реактивные элементы контура генератора. Допустим, что емкость контура изменяется по закону

$$C = C_0 + kb(t) = C_0 [1 + b(t)k/C_0],$$

где k — постоянный множитель с размерностью $[\Phi/\text{В}]$.

Частота напряжения на выходе контура

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC_0} \left[1 + \frac{k}{C_0} b(t) \right]^{1/2}}. \quad (3.50)$$

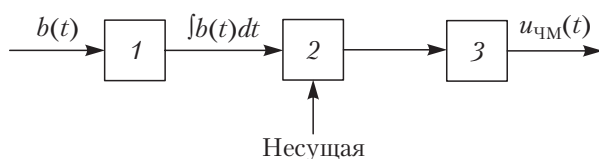


Рис. 3.26. Структурная схема модулятора широкополосной ЧМ:
1 — интегратор; 2 — фазовый модулятор; 3 — умножитель частоты

Если выполнить условие

$$x = \frac{k}{C_0} b(t) \ll 1,$$

то функцию

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

можно разложить в ряд Тейлора:

$$f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a).$$

Вычислив производную

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

и положив $a = 0$, получим

$$f(x) \approx 1 - \frac{x}{2} = 1 - \frac{kb(t)}{2C_0}.$$

Подставив полученное выражение в (3.50), получим

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \left[1 - \frac{kb(t)}{2C_0} \right] = \omega_0 + k_{\text{чМ}} b(t),$$

где $k_{\text{чМ}} = -\omega_0 k / (2C_0)$.

Переменную емкость получают, например, с помощью закрытого полупроводникового диода (варикапа), емкость которого зависит от подводимого к нему напряжения. Переменную индуктивность получают с помощью насыщенной катушки индуктивности. Переменную реактивность (индуктивность или емкость) можно получить также, применяя реактивный каскад на транзисторе или на лампе.

Схема реактивного каскада на транзисторе (рис. 3.27) содержит транзистор и элементы Z_1, Z_2 , каждый из которых может быть или резистором, или конденсатором.

Выбором параметров Z_1, Z_2 обеспечивается неравенство переменных токов так, что $\dot{I}_k \gg \dot{I}$.

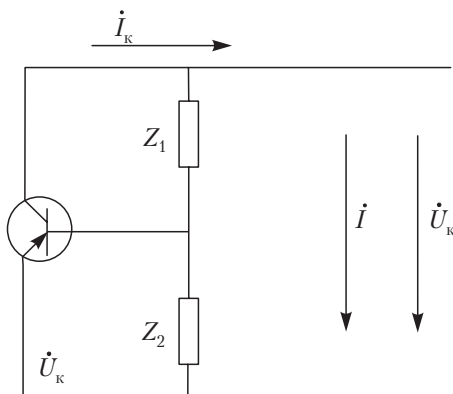


Рис. 3.27. Схема реактивного каскада на транзисторе

Комплексное сопротивление между эмиттером и коллектором равно отношению комплексных амплитуд напряжения и тока:

$$Z = \frac{\dot{U}_k}{\dot{I}_k},$$

где $\dot{U}_k = \dot{I}(Z_1 + Z_2)$; $\dot{I}_k = S\dot{U}_6 = S\dot{I}Z_2$; S — мгновенная крутизна характеристики транзистора.

С учетом выражений для комплексных амплитуд напряжения и тока получим

$$Z = \frac{Z_1 + Z_2}{SZ_2}.$$

Если выполняется условие $|Z_2| \ll |Z_1|$, то $Z \approx Z_1/SZ_2$.

Пусть $Z_1 = 1/(j\omega C)$, $Z_2 = R$. В этом случае

$$Z = \frac{1}{j\omega CRS} = \frac{1}{j\omega C_3},$$

где $C_3 = SRC$.

Реактивный каскад ведет себя как конденсатор с эквивалентной емкостью $C_3 = SRC$.

Если $Z_1 = R$, $Z_2 = 1/j\omega C$, то $Z = j\omega CR/S = j\omega L_3$. Реактивный каскад в этом случае эквивалентен катушке индуктивности величиной

$$L_3 = CR/S.$$

Управление величиной L_ω или C_ω осуществляется изменением крутизны S по закону модулирующего сигнала $b(t)$, который подается на базу транзистора.

3.5.4. Дискретная частотная модуляция

При дискретной ЧМ информационная двоичная последовательность разбивается на блоки одинаковой длины k . В каждом блоке содержится одно из 2^k слов, $k = 1, 2, 3, \dots$. Каждому слову блока соответствует значение частоты радиосигнала. Она остается постоянной в пределах каждого блока, но изменяется при переходе от блока к блоку с изменением двоичного слова. Правило отображения двоичных слов блока в значения частоты радиосигнала называется *модуляционным кодом* ЧМ сигнала.

Дискретная ЧМ является вариантом кодирования передаваемой информации.

Если длина блока $k = 1$, то частота сигнала определяется только двумя символами 0 и 1. По этой причине модуляция называется двоичной. Двоичные ЧМ сигналы являются *сигналами с активной паузой*. Их энергия в любом единичном интервале не равна нулю.

Два или несколько гармонических колебаний называются *когерентными* или *связанными*, если их несущие частоты и начальные фазы связаны взаимно однозначной зависимостью. Знание этой зависимости позволяет по значению частоты и фазы, например, 1-го колебания определить частоты и начальные фазы остальных колебаний. Так, два колебания $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ и $\cos(k\omega_0 t + k\varphi_0)$, где k — целое положительное число, являются когерентными.

Некогерентными называются такие гармонические колебания, несущие частоты и начальные фазы которых не связаны между собой.

В модулятор двоичного ЧМ сигнала подают как когерентные, так и некогерентные гармонические сигналы. Структурная схема модулятора двоичного ЧМ сигнала приведена на рис. 3.28.

Двоичный ЧМ сигнал на выходе модулятора

$$u_{\text{вых}}(t) = A\bar{a}(t)\cos\omega_1 t + Aa(t)\cos\omega_2 t, \quad (3.51)$$

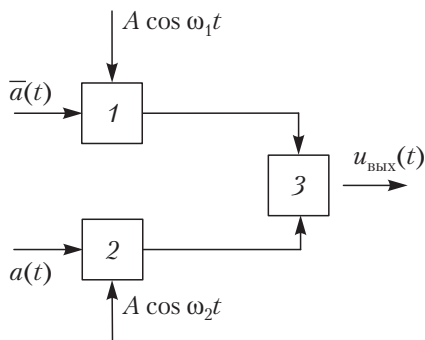


Рис. 3.28. Структурная схема модулятора двоичного ЧМ сигнала:
1, 2 — умножители; 3 — сумматор

где модулирующие сигналы определены следующими выражениями:

$$\bar{a}(t) = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k v[t - (k-1)\tau_{\text{и}}]; \quad a(t) = \sum_{k=1}^n a_k v[t - (k-1)\tau_{\text{и}}],$$

здесь $\bar{a}_k$ — k -й элемент другого слова, определяемый из уравнения $\bar{a}_k + a_k = 1$ (сложение — это сложение по модулю два); a_k — k -й элемент информационного двоичного слова длиной n , равный 1 или 0; $v(t)$ — форма импульса информационного двоичного сигнала.

Как следует из выражения (3.51), двоичный ЧМ сигнал строится из двух двоичных АМ сигналов. Один из них формируется на выходе первого, другой — на выходе второго умножителя модулятора. Поэтому спектральная плотность двоичного ЧМ сигнала равна сумме спектральных плотностей двух двоичных АМ сигналов (рис. 3.29).

Дискретный ЧМ сигнал

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = A \sum_{i=1}^n v[t - (i-1)k\tau_{\text{и}}] \cos(\omega_i t + \varphi_i),$$

где $\tau_{\text{и}}$ — тактовый интервал двоичного информационного сигнала; k — длина блока; n — число блоков; A — амплитуда; ω_i — частота; φ_i — начальная фаза радиосигнала; $v(t)$ — форма видеопульса длительностью $k\tau_{\text{и}}$.

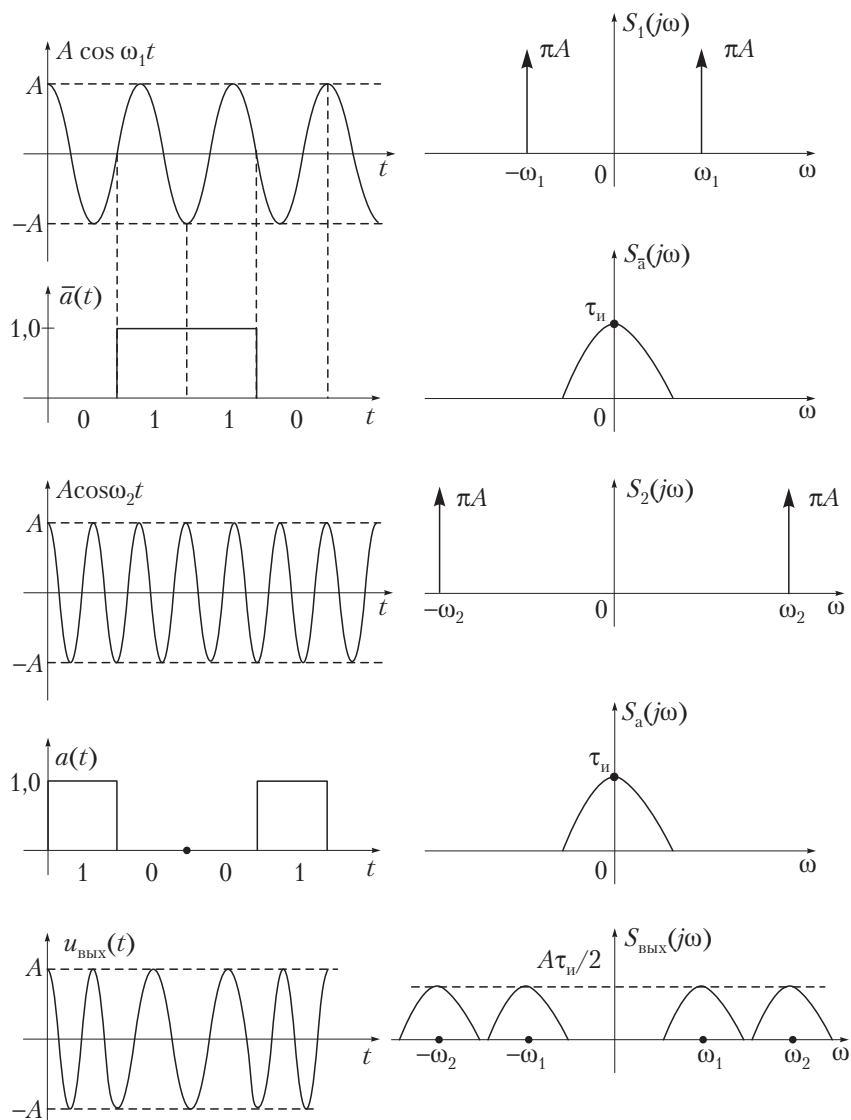


Рис. 3.29. Формирование двоичного ЧМ сигнала
(временные диаграммы и спектры)

Значение частоты в i -м блоке определяется числом

$$\sum_{r=0}^{k-1} a_r 2^r,$$

где a_r — буква двоичного слова i -го блока, равная 0 или 1.

Спектр сигнала равен сумме спектров радиоимпульсов одинаковой длительности $k\tau_{\text{и}}$, несущие частоты которых определяются модуляционным кодом. Ширина спектра ЧМ сигнала определяется шириной спектра видеоимпульса $\Delta\omega_{\text{и}}$, разном частот $\omega_i - \omega_{i-1}$, $i = 2, 3, \dots, 2^k$, между соседними спектрами радиоимпульсов, числом 2^k используемых частот:

$$\Delta\omega = \sum_{i=2}^{2^k} (\omega_i - \omega_{i-1}) + 2\Delta\omega_{\text{и}}.$$

Если дискретный ЧМ сигнал построен из прямоугольных радиоимпульсов с одинаковым разном частот ω_p , то

$$\Delta\omega = \omega_p(2^k - 1) + 2\Delta\omega_{\text{и}}. \quad (3.52)$$

При выполнении равенства $\omega_p = 2\Delta\omega_{\text{и}}$ ширина спектра равна

$$\Delta\omega = 2^k \frac{4\pi}{k\tau_{\text{и}}}.$$

Для дискретного ЧМ сигнала база равна

$$B = k\tau_{\text{и}}\Delta f = k\tau_{\text{и}}2^k \frac{2}{k\tau_{\text{и}}} = 2^{k+1}.$$

Для двоичного ЧМ сигнала ($k = 1$)

$$\Delta\omega = 8\pi/\tau_{\text{и}}. \quad (3.53)$$

Отношение $m = \Delta\omega/\omega_T$ называется *индексом ЧМ*, где $\omega_T = 2\pi/\tau_{\text{и}}$.



3.6. Фазовая модуляция гармонического переносчика

3.6.1. Непрерывная фазовая модуляция

В п. 3.5.1 показано, что ФМ является разновидностью угловой модуляции. Для ФМ сигнала его фаза определяется формулой

$$\theta(t) = \omega_0 t + 2\pi k_{\text{ФМ}} b(t) = \omega_0 t + 2\pi k_{\text{ФМ}} b_0 \cos \Omega t = \omega_0 t + m_{\text{Ф}} \cos \Omega t,$$

где $m_{\text{Ф}} = 2\pi k_{\text{ФМ}} b_0$ — индекс фазовой модуляции.

Мгновенная частота ФМ сигнала

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_0 - 2\pi k_{\text{ФМ}} b_0 \Omega \sin \Omega t = \omega_0 - \Delta\omega \sin \Omega t,$$

где $\Delta\omega = 2\pi k_{\text{ФМ}} b_0 \Omega$ — девиация частоты.

ФМ сигнал определяется формулой (3.47) при подстановке вместо $m_{\text{ЧМ}}$ выражения

$$\Delta\omega/\Omega = 2\pi k_{\text{ФМ}} b_0 \Omega/\Omega = m_{\text{Ф}}.$$

Девиация частоты $\Delta\omega$ ФМ сигнала пропорциональна частоте модуляции и ширина спектра ФМ сигнала не будет постоянной, как у ЧМ сигнала, а будет меняться с изменением частоты Ω модулирующего сигнала. По этой причине ФМ сигналы в системах радиовещания не применяются. Однако ФМ сигнал получить легче, чем ЧМ. Поэтому во многих системах ЧМ сигнал получают с помощью фазового модулятора, на вход которого подают прошедший через интегратор сигнал $b(t)$ (см. рис. 3.26).

3.6.2. Двоичная фазовая модуляция

При дискретной ФМ фаза радиосигнала изменяется дискретно. Число возможных значений этой фазы определяет название модуляции. Если это число равно 2, то модуляция называется *двоичной*. Если оно равно 2^k , где k — целое положительное число, причем $k > 2$, то модуляция называется *многократной* или *многопозиционной*; при $k = 2$ модуляция называется *двукратной фазовой модуляцией* (ДФМ).

Модулирующий сигнал при двоичной ФМ носителя сообщения

$$b(t) = \sum_{i=1}^n b_i v[t - (i-1)\tau_n],$$

где b_i — элемент информационного двоичного слова, равный или 0, или 1; $v(t)$ — форма импульса модулирующего сигнала; τ_n — длительность импульса.

Фаза радиосигнала в пределах некоторого единичного интервала равна $\theta(t) = \omega_0 t$, если $b_i = 0$, и равна $\theta(t) = \omega_0 t + 2\pi k_{\text{ФМ}} v[t - (i-1)\tau_n]$, если $b_i = 1$.

Пусть $v(t)$ — прямоугольный импульс с длительностью τ_n и амплитудой, равной 1. Тогда, если $b_i = 1$, то $\theta(t) = \omega_0 t + 2\pi k_{\text{ФМ}}$. Если коэффициент $k_{\text{ФМ}} = 0,5$, то $2\pi k_{\text{ФМ}} = \pi$ и фаза $\theta(t) = \omega_0 t + \pi$. Двоичный ФМ сигнал в пределах i -го единичного интервала

$$u_i(t) = \begin{cases} Av[t - (i-1)\tau_n] \cos \omega_0 t, & b_i = 0; \\ Av[t - (i-1)\tau_n] \cos(\omega_0 t + \pi) = \\ = -Av[t - (i-1)\tau_n] \cos \omega_0 t, & b_i = 1. \end{cases}$$

Этот сигнал можно записать также в виде

$$u_i(t) = Ac_i v[t - (i-1)\tau_n] \cos \omega_0 t,$$

где c_i — i -й элемент, полученный преобразованием i -го элемента информационного двоичного слова по правилу: 0 изменяется на 1, 1 изменяется на -1 ; $A \cos \omega_0 t$ — носитель сообщения.

Двоичный ФМ сигнал

$$u_{\text{ФМ}}(t) = A \sum_{i=1}^n c_i v[t - (i-1)\tau_n] \cos \omega_0 t = Ac(t) \cos \omega_0 t, \quad (3.54)$$

где

$$c(t) = \sum_{i=1}^n c_i v[t - (i-1)\tau_n].$$

Поскольку двоичный ФМ сигнал и двоичный АМ сигнал определяются аналогичными формулами, то некоторые свойства спектральных плотностей этих сигналов совпадают.

В частности, ширина спектра двоичного ФМ сигнала определяется той же формулой, что и для двоичного АМ сигнала:

$$\Delta\omega = 2\omega_B,$$

где $\omega_B = 2\pi/\tau_{\text{и}}$, $\tau_{\text{и}}$ — длительность прямоугольного видеоимпульса.

Диаграммы, поясняющие формирование двоичного ФМ сигнала, приведены на рис. 3.30.

Разновидностью двоичной ФМ является однократная относительная фазовая модуляция (ОФМ). Математическое описание этого сигнала отличается тем, что сумма по модулю два для двух его соседних символов c_i, c_{i-1} определяет символ b_i двоичного ФМ сигнала. Структурная схема преобразователя символов b_i абсолютного

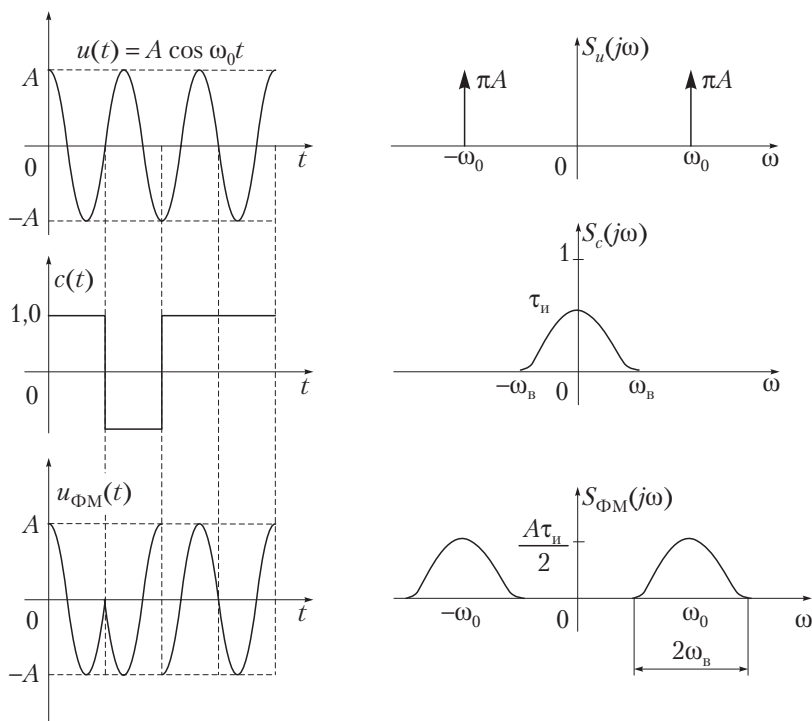


Рис. 3.30. Формирование двоичного ФМ сигнала
(временные диаграммы и спектры)

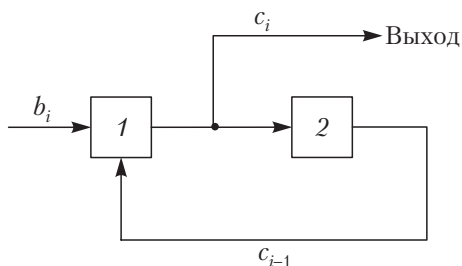


Рис. 3.31. Структурная схема преобразователя:
1 — сумматор по модулю два; 2 — линия задержки

кода в последовательность символов относительного кода приведена на рис. 3.31. Работа схемы определяется выражением

$$c_i = b_i + c_{i-1}, \quad (3.55)$$

где b_i , c_i — элементы двоичных последовательностей в i -м тактовом интервале, $b_i \in 0,1$, $c_i \in 0,1$; суммирование выполняется по модулю два.

Сформированная на выходе схемы последовательность символов относительного кода далее поступает на фазовый модулятор, работа которого описана выше. Ширина спектра сигнала с однократной ОФМ равна ширине спектра двоичного ФМ сигнала.

Из приведенного способа формирования ОФМ сигнала следует, что если передаваемый информационный символ равен 0, то начальная фаза радиоимпульса в k -м единичном интервале равна начальной фазе радиоимпульса в предыдущем $(k - 1)$ -м единичном интервале. Но если передаваемый символ равен 1, то начальная фаза в k -м единичном интервале меняется на π относительно фазы радиоимпульса в предыдущем $(k - 1)$ -м единичном интервале.

3.6.3. Многократная фазовая модуляция

В случае многократной ФМ информационная двоичная последовательность, передаваемая по каналу, разбивается на блоки одинаковой длины. Каждому двоичному слову блока ставится в однозначное соответствие значение начальной фазы гармонического сигнала. Если длина блока равна k , то число значений фаз равно 2^k . Правило отображения двоичных слов блока в значения

фаз гармонического сигнала называется *модуляционным кодом* сигнала с ОФМ.

Фаза гармонического сигнала остается постоянной в пределах каждого блока, но изменяется при переходе от блока к блоку с изменением передаваемой двоичной информации. Если длина блока равна k , а передача одного символа информационного слова происходит за время $\tau_{\text{и}}$, то фаза гармонического сигнала остается неизменной в течение времени, равного $k\tau_{\text{и}}$.

Сигнал с многократной ФМ, передаваемый в i -м интервале времени,

$$u_i(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_i), \quad (i-1)k\tau_{\text{и}} < t \leq ik\tau_{\text{и}},$$

где i — порядковый номер передаваемого по каналу информационного двоичного слова блока, $i = 1, 2, 3, \dots$; A — амплитуда сигнала; φ_i — начальная фаза.

Ширина спектра сигнала

$$\Delta\omega = 4\pi/k\tau_{\text{и}},$$

т.е. меньше ширины спектра двоичного ФМ сигнала. Это позволяет при ширине полосы пропускания канала, равной $4\pi/\tau_{\text{и}}$, увеличить скорость передачи информации в k раз.

Частным случаем многократной ФМ является ДФМ. Пусть информационная последовательность равна 1001101011, длина блоков выбрана равной 2. Двоичные случайные слова блоков равны 10, 01, 10, 10, 11. При поступлении этих слов на модулятор фаза ДФМ сигнала изменяется дискретно в момент времени $t = 0, 2\tau_{\text{и}}, 4\tau_{\text{и}}, 6\tau_{\text{и}}, 8\tau_{\text{и}}$ в соответствии с четверичным словом и модуляционным кодом. Длительность посылок ДФМ сигнала равна $2\tau_{\text{и}}$, ширина его спектра $\Delta\omega = 4\pi/2\tau_{\text{и}} = 2\pi/\tau_{\text{и}}$, т.е. в 2 раза меньше ширины спектра двоичного ФМ сигнала (табл. 3.1, рис. 3.32).

Таблица 3.1

Модуляционный код ДФМ

Блок	Фаза
00	$\varphi_1 = 0$
01	$\varphi_2 = \pi/2$
10	$\varphi_3 = \pi$
11	$\varphi_4 = 3\pi/2$

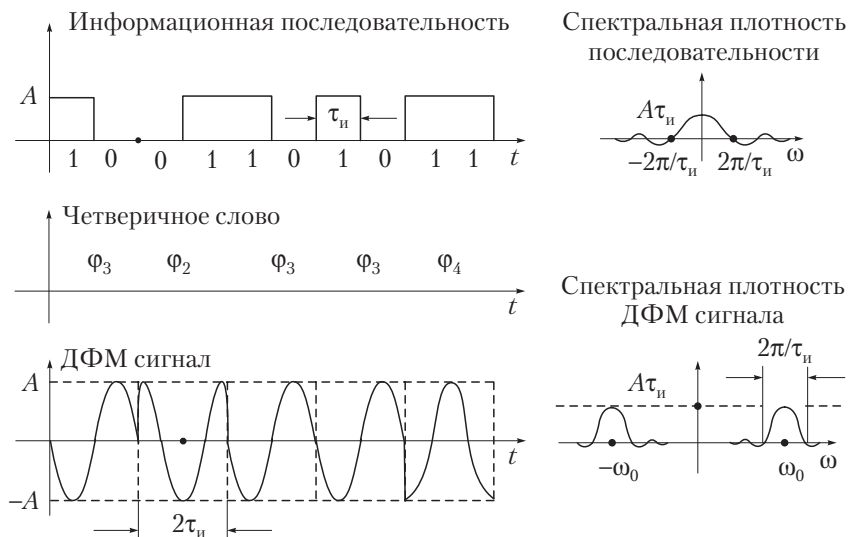


Рис. 3.32. Диаграммы, поясняющие двукратную фазовую модуляцию (ДФМ)

При использовании многократной ОФМ информационная двоичная последовательность, передаваемая по каналу, разбивается на блоки одинаковой длины $k > 2$. Каждому слову блока ставится в однозначное соответствие значение разности фаз двух соседних *посылок сигнала* одинаковой длительности $k\tau_n$. Если длина блока равна k , то число значений разности фаз равно $m = 2^k$, где $k = 3, 4, 5, \dots$ — целые числа. Правило отображения двоичных слов блока значениями разности фаз является модуляционным кодом. Разность фаз является информационным параметром сигнала с многократной ОФМ. Значения этого параметра равно одному из $m = 2^k$ возможных значений:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \psi_0; \\ \psi_2 &= \psi_0 + \frac{2\pi}{m}; \\ &\dots\dots\dots \\ \psi_m &= \psi_0 + (m-1)\frac{2\pi}{m},\end{aligned}$$

где ψ_0 — начальное значение информационного параметра.

При равномерном размещении всех вариантов разности фаз в интервале $[0; 2\pi]$ минимальная разность $\Delta\psi_{\min} = 2\pi/m$. Кратность ОФМ определяется количеством двоичных единиц информации k , содержащихся в каждой посылке сигнала.

Сигнал с многократной ОФМ определяется выражениями

$$u_{i-1}(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_{i-1}), \quad (i-1)T < t \leq iT;$$

$$u_i(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_i), \quad iT < t \leq (i+1)T,$$

где A — амплитуда сигнала; ω_0 — несущая частота; $T = k\tau_{\text{и}}$ — длительность посылки.

Пусть в интервале передачи i -й посылки сигнала передается k -разрядное двоичное слово блока. Это слово определяет в соответствии с модуляционным кодом разность начальных фаз i -й и $(i-1)$ -й посылок сигнала:

$$\psi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1},$$

где φ_{i-1} — известное значение начальной фазы $(i-1)$ -й посылки, найденное ранее. Следовательно, устанавливаемое значение начальной фазы i -й посылки сигнала равно

$$\varphi_i = \psi_i + \varphi_{i-1}.$$

Ширина спектра сигнала с многократной ОФМ определяется длительностью посылки сигнала:

$$\Delta\omega = \frac{4\pi}{k\tau_{\text{и}}}.$$

Она меньше ширины спектра двоичного ФМ сигнала в k раз, что позволяет в канале с шириной полосы пропускания, равной $4\pi/\tau_{\text{и}}$, разместить такое число каналов передачи сигналов с многократной ОФМ, которое обеспечит суммарную скорость передачи в k раз большую.

Отличительной особенностью сигналов с однократной, двукратной и многократной ОФМ является то, что их применение не требует высокой стабильности параметров каналов. Ее достаточно сохранить в течение длительности этих сигналов. Например, если начальная фаза $(i-1)$ -й посылки сигнала с многократной ОФМ равна $\varphi_{i-1} + \varphi_0$, а начальная фаза i -й посылки равна $\varphi_i + \varphi_0$, то разность фаз

$$\psi_i = (\varphi_i + \varphi_0) - (\varphi_{i-1} + \varphi_0) = \varphi_i - \varphi_{i-1}$$

не зависит от случайного фазового отклонения φ_0 в интервале приема сигнала.

3.6.4. Квадратурная амплитудная модуляция

При квадратурной амплитудной модуляции (КАМ) каждому двоичному слову блока длиной k символов ставятся определенные значения начальной фазы и амплитуды гармонического сигнала. Например, двоичным словам из 4 символов можно поставить в соответствие 16 радиосигналов одинаковой длительности, отличающихся друг от друга амплитудой и фазой. Значения амплитуд и фаз для всех 16 радиосигналов определяются с помощью рис. 3.33. Например, для одного из сигналов начальная фаза равна 45° , а амплитуда равна $\sqrt{2}$. Эти значения соответствуют вектору, проведенному из начала координат до выделенной точки.

Квадратурный амплитудно-модулированный сигнал формируется посредством кодирования. Модуляционный код определен при этом правилом отображения двоичных слов блока в начальные фазы и амплитуды радиосигналов.

Радиосигнал с КАМ

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \sum_{i=1}^n A_i v[t - (i-1)k\tau_{\text{и}}] \cos(\omega_0 t + \varphi_i) = \\
 &= \sum_{i=1}^n \{A_i \cos \varphi_i v[t - (i-1)k\tau_{\text{и}}] \cos \omega_0 t - \\
 &\quad - A_i \sin \varphi_i v[t - (i-1)k\tau_{\text{и}}] \sin \omega_0 t\}, \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

где A_i — амплитуда; $v(t)$ — форма видеоимпульса; $\tau_{\text{и}}$ — длительность единичного (тактового) интервала; φ_i — начальная фаза i -го радиоимпульса.

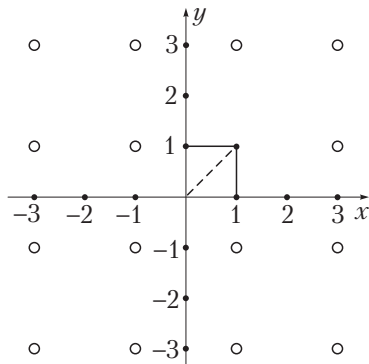


Рис. 3.33. Значения амплитуд и начальных фаз радиосигналов КАМ

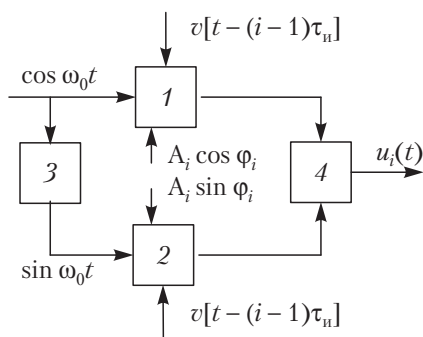


Рис. 3.34. Структурная схема модулятора сигнала с КАМ: 1, 2 — умножители; 3 — фазосдвигающее на $\pi/2$ устройство; 4 — вычитающее устройство

Если амплитуда импульсов остается постоянной, то сигнал с КАМ превращается в сигнал с многократной ФМ.

Структурная схема модулятора показана на рис. 3.34.

Использование КАМ позволяет (как и при многократной ФМ) сократить ширину спектра сигнала в $\log N$ раз или при той же ширине полосы, что и для двоичной ФМ, увеличить скорость передачи в $k = \log N$ раз, где N — число значений амплитуд и начальных фаз.

3.6.5. Квадратурная двоичная фазовая модуляция

Структурная схема модулятора приведена на рис. 3.35. Двоичные кодовые последовательности a , b от двух источников информации модулируют по фазе на 0 , π рад. квадратурные составляющие, а затем полученные сигналы складываются. В результате

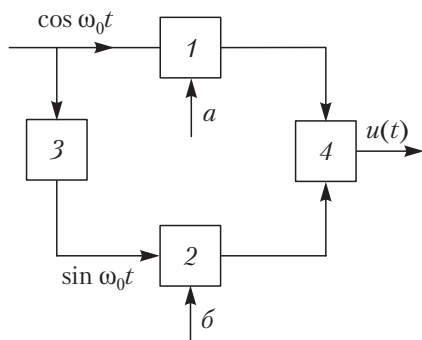


Рис. 3.35. Структурная схема модулятора: 1, 2 — умножители; 3 — фазосдвигающее на $\pi/2$ устройство; 4 — сумматор

на выходе модулятора формируется сигнал, равный сумме двух двоичных фазомодулированных сигналов:

$$u(t) = \sum_{i=1}^n q_i v[t - (i-1)\tau_n] \cos \omega_0 t + \sum_{j=1}^n q_j v[t - (j-1)\tau_n] \sin \omega_0 t,$$

где q_i, q_j — элементы источников информации, равные ∓ 1 ; $v(t)$ — форма видеоимпульса источника информации; τ_n — длительность видеоимпульса.

3.7. Дискретная модуляция шумоподобного сигнала

3.7.1. Двоичная модуляция постоянного тока

Известны две разновидности двоичной модуляции постоянного тока:

- модуляция по амплитуде;
- модуляция по знаку.

При АМ изменяется амплитуда, а при модуляции знака — направление тока в соответствии с передаваемым информационным двоичным словом. Во временной области сигналы определяются формулой (3.33), а в частотной — формулой (3.34). Для АМ сигнала $b_k \in \{0, 1\}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Для модулированного по знаку сигнала $b_k \in \{-1, 1\}$. В структуре амплитудного модулятора (рис. 3.36)

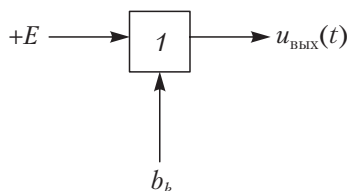


Рис. 3.36. Структурная схема модулятора постоянного тока по амплитуде:

1 — управляемый ключ; b_k — двоичное слово

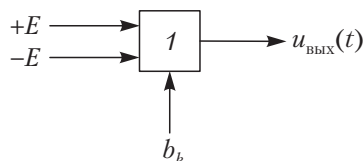


Рис. 3.37. Структурная схема модулятора постоянного тока по знаку:

1 — переключатель; b_k — двоичное слово

содержится ключ, а в структуре знакового модулятора (рис. 3.37) — переключатель. Ключ и переключатель являются управляемыми, а их состояния определяются элементами информационного слова.

3.7.2. Генерирование шумоподобных сигналов

Шумоподобные сигналы можно получить, используя модуляторы постоянного тока и генераторы. В случае применения модуляторов кодовые слова, определяющие закон формирования ШС, хранятся в запоминающем устройстве. Сигналы, формируемые в соответствии с этими словами, поступают на управляющий вход ключа (см. рис. 3.36) или переключателя (см. рис. 3.37).

Генераторы строятся по автономной схеме, структура которой определяется законом формирования ШС.

Наиболее распространенный подкласс генераторов ШС строится на базе *цифровых автоматов*. Если формируемая на выходе двоичная последовательность получена с использованием операций задержки и логической операции суммирования по модулю два, то такой автомат называется *линейным*, а формируемая на его выходе последовательность — *линейной последовательностью*. Если кроме указанных операций используются другие логические операции (например, операция И), то формируемая цифровым автоматом двоичная последовательность называется *нелинейной*.

Рассмотрим пример генерирования линейной последовательности.

На рис. 3.38 приведена схема генератора *M*-последовательности. Буквой *M* принято обозначать разновидность линейных двоичных последовательностей. *M*-последовательность относится к классу *псевдослучайных последовательностей*.

Генератор построен на регистре сдвига с обратными связями и сумматоре по модулю два. Подключение входов сумматора к выходам определенных ячеек регистра определяет структуру *M*-последовательности.

Пусть до подачи тактовых импульсов в регистр было введено число 1000. С поступлением первого тактового импульса в первую ячейку регистра запишется цифра 0, так как сумма по модулю два цифр третьего и четвертого разрядов равна 0, а во вторую ячейку перейдет цифра 1, ранее записанная в первой ячейке. Соответст-

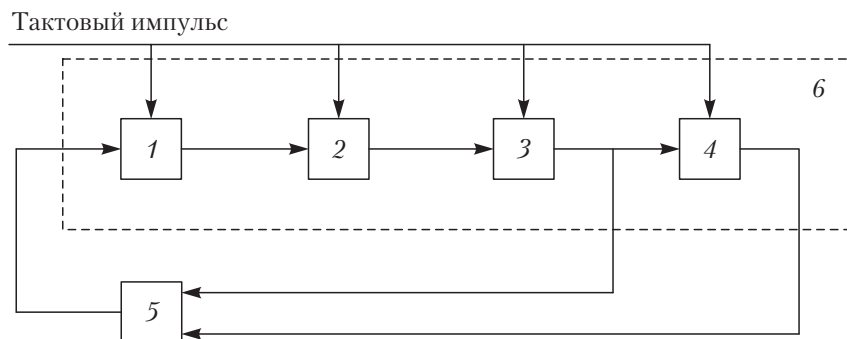


Рис. 3.38. Генератор шумоподобного сигнала:
 1, 2, 3, 4 — ячейки регистра сдвига; 5 — сумматор по модулю два;
 6 — регистр сдвига

венно, в третью и четвертую ячейки запишутся цифры, ранее содержащиеся во второй и третьей ячейках, и т.д. Эти состояния ячеек приведены в первой строке табл. 3.2.

Таблица 3.2

Состояние ячеек регистра сдвига

Номер тактового импульса	Номер ячейки			
	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	1	0
3	1	0	0	1
4	1	1	0	0
5	0	1	1	0
6	1	0	1	1
7	0	1	0	1
8	1	0	1	0
9	1	1	0	1
10	1	1	1	0
11	1	1	1	1
12	0	1	1	1
13	0	0	1	1
14	0	0	0	1
15	1	0	0	0

С поступлением последующих тактовых импульсов процесс смены состояний ячеек продолжится. В результате на их выходах будут генерироваться сдвинутые относительно друг друга M -последовательности. Например, на выходе четвертой ячейки регистра генерируется последовательность 001001101011110. Она записана в последнем столбце табл. 3.2. На выходе третьей ячейки генерируется последовательность 010011010111100. Она записана в предпоследнем столбце табл. 3.2 и т.д.

Каждая из последовательностей физически реализуется сдвинутыми во времени видеоимпульсами прямоугольной формы в соответствии с положением символов 1 в одном периоде M -последовательности. Длительность видеоимпульсов τ_0 определяется периодом тактовых импульсов. При непрерывном поступлении тактовых импульсов последовательность периодически повторяется через время, равное $N\tau_0 = 15\tau_0$, где $N = 2^k - 1$ — период M -последовательности, определяемый числом разрядов регистра сдвига (в нашем примере $k = 4$). Начальную комбинацию можно задавать любым из 16 двоичных чисел, кроме числа 0000. Генерируемые последовательности остаются при этом одними и теми же, но только сдвигаются в зависимости от начальной кодовой комбинации.

Циклические сдвиги можно получить на основе свойства M -последовательности, которое заключается в следующем.

Сложение по модулю два M -последовательности и ее задержанной копии дает M -последовательность, задержанную относительно суммируемых последовательностей.

Для k ячеек регистра сдвига число задержанных относительно друг друга M -последовательностей определяется суммой

$$N - k = C_k^2 + C_k^3 + \dots + C_k^k.$$

Остальные k последовательностей образуются на выходах ячеек регистра. Поэтому общее число сдвинутых последовательностей равно

$$N = \sum_{q=1}^k C_k^q.$$

Общее число сумматоров по модулю два для получения всех циклических сдвигов M -последовательности равно $N - k$. Первый

сумматор содержит два входа, второй — три и т.д., последний содержит k входов.

Изменяя подключение входов сумматора по модулю два к тем или иным ячейкам регистра сдвига, можно получать разные по структуре последовательности, но с одними и теми же свойствами. Число таких последовательностей равно

$$\frac{1}{k} \Phi(2^k - 1),$$

где $\Phi(x)$ — функция Эйлера с аргументом $2^k - 1$.

Например, для $k = 4$ число M -последовательностей равно 2, для $k = 11$ — равно 176, т.е. с ростом длины их число резко увеличивается.

Периодическая нормированная автокорреляционная функция M -последовательности длиной $N = 15$ символов приведена на рис. 3.39. Положительные значения этой функции не превышают единицы, а отрицательные определяются числом, которое обратно пропорционально периоду M -последовательности. Поэтому с ростом периода отрицательные значения функции стремятся к нулю.

Вид периодической нормированной автокорреляционной функции определяется свойствами последовательности, в том числе следующим свойством: в пределах периода M -последовательности число символов 1 больше числа символов 0 ровно на единицу.

Нормированная непериодическая функция автокорреляции того же ШС имеет значения, не превышающие $1/\sqrt{N}$ (при сдвигах, не равных нулю).

Непериодическая автокорреляционная функция M -последовательности напоминает автокорреляционную функцию шума, возникающего во входных цепях усилителей. По этой причине такие сигналы называются *шумоподобными*.

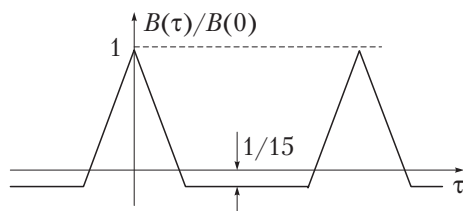


Рис. 3.39. Периодическая автокорреляционная функция ШС

3.7.3. Модуляция шумоподобного сигнала по форме

При модуляции ШС по форме (см. рис. 3.12) информационная двоичная последовательность разбивается на блоки длиной из k символов. Набору 2^k , $k = 1, 2, 3, \dots$, двоичных слов блока ставится в однозначное соответствие набор отличающихся по форме ШС. Правило отображения двоичных слов блока формам ШС образует *модуляционный код ШС*.

Модулируя амплитуду или знак (фазу) ШС информационной двоичной последовательностью, получают или АМ ШС, или ФМ ШС. Последний вид модуляции называется *инверсией ШС*.

На рис. 3.40 приведена схема модулятора АМ ШС. Генератор ШС выдает периодическую двоичную псевдослучайную видеопоследовательность $u_1(t)$, определяемую периодическим двоичным кодовым словом. Для иллюстрации работы схемы (рис. 3.41) это слово равно коду Баркера длиной в 7 символов: 1011000. Длительность импульса видеопоследовательности равна τ_0 . Она меньше длительности $\tau_{\text{и}}$ импульса информационной последовательности $b(t)$ в $\tau_{\text{и}}/\tau_0$ раз. Положение управляемого ключа определяется элементом информационной последовательности: если этот элемент равен 1, то ключ замкнут, а если равен 0, то разомкнут. Ширина спектра сигнала $u_2(t)$ на выходе ключа определяется длительностью τ_0 импульса видеопоследовательности. Если это прямоугольный импульс, то ширина спектра равна $1/\tau_0$ Гц. Она в $\tau_{\text{и}}/\tau_0$ раз больше ширины спектра информационной двоичной последовательности.

База этого ШС

$$B = \tau_{\text{и}} \frac{1}{\tau_0} = N, \quad (3.57)$$

где N — период псевдослучайной последовательности. В рассматриваемом примере $N = 7$.

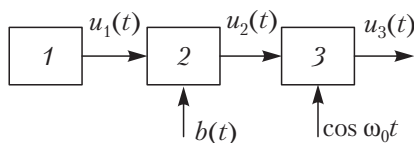


Рис. 3.40. Амплитудный модулятор шумоподобного сигнала:
1 — генератор ШС; 2 — управляемый ключ (первый АМ); 3 — второй АМ

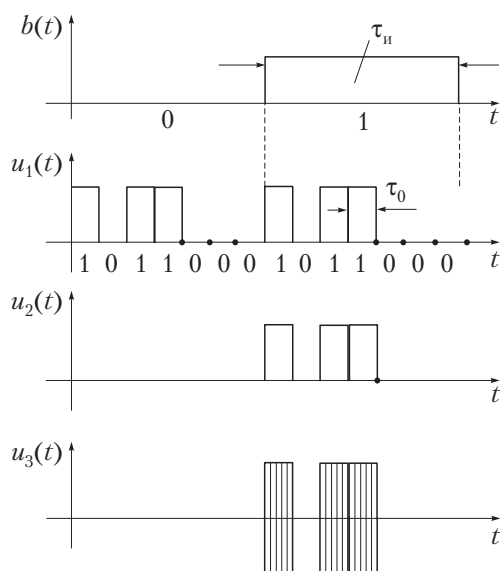


Рис. 3.41. Временные диаграммы, поясняющие работу амплитудного модулятора ШС

В некоторых случаях сигнал $u_2(t)$ непосредственно поступает в канал, а в других — преобразуется в радиосигнал $u_3(t)$ в амплитудном модуляторе. При этом ширина спектра и база удваиваются. На рис. 3.42, 3.43 приведены схема фазового модулятора ШС и временные диаграммы, поясняющие его работу.

Псевдослучайная последовательность с выхода генератора ШС поступает на управляемый переключатель и в зависимости от символа передаваемой информационной последовательности $b(t)$

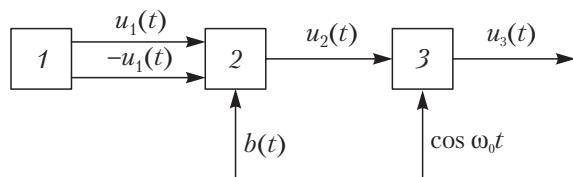


Рис. 3.42. Фазовый модулятор шумоподобного сигнала:
1 — генератор ШС; 2 — управляемый переключатель (первый ФМ);
3 — второй ФМ

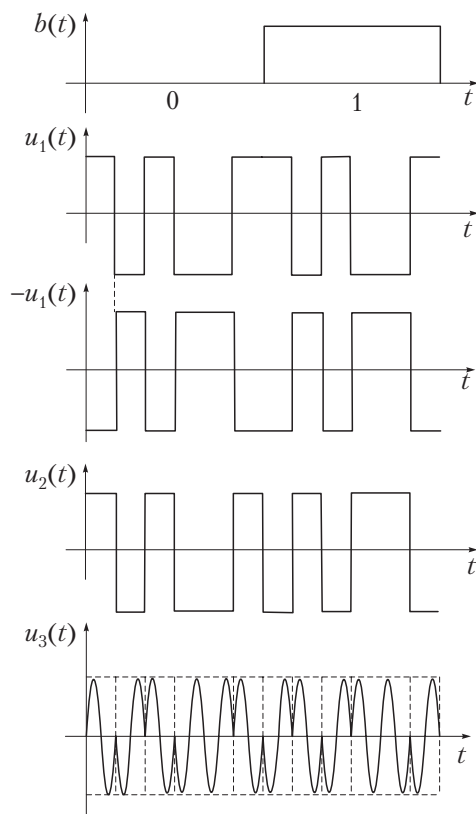


Рис. 3.43. Диаграммы, поясняющие работу фазового модулятора ШС

(1 или 0) меняет свой знак на выходе управляемого переключателя. Так же как и при АМ, сигнал $u_2(t)$ или поступает в канал непосредственно, или преобразуется с помощью фазового модулятора в радиосигнал.

Ширина спектра сигнала на выходе переключателя определяется длительностью импульса и равна $1/\tau_0$ [Гц], если этот импульс имеет прямоугольную форму. Его база равна базе АМ ШС и определяется формулой (3.57). Ширина спектра и база радиосигнала в 2 раза больше.

На рис. 3.44 приведена структурная схема модулятора ШС по форме ($k \geq 1$).

Код из N слов называется *симплексным*, если скалярное произведение любой пары слов этого кода равно $-\frac{1}{N-1}$, если N — четное; $-\frac{1}{N}$, если N — нечетное. Поясним работу модулятора ШС по форме на примере симплексного кода длиной 7 символов. Для выбранного кода скалярное произведение равно $-1/7$.

В табл. 3.3 приведены кодовые слова симплексного кода, а также двоичные слова (длиной 2) с выхода источника дискретных сообщений. Каждому двоичному слову блока соответствует кодовое слово симплексного кода, определяющее форму шумоподобного сигнала.

Таблица 3.3

Кодовые слова, определяющие ШС							
Двоичный код	Номер символа симплексного кода						
	1	2	3	4	5	6	7
00	1	1	1	-1	-1	1	-1
01	-1	1	1	1	-1	-1	1
10	1	-1	1	1	1	-1	-1
11	-1	1	-1	1	1	1	-1

Положение управляемого переключателя на рис. 3.44 определяется двоичным словом с выхода источника дискретного сообщения. Например, если слово равно 00, то выход управляемого переключателя соединен с выходом генератора 2, генерирующего ШС на основе слова симплексного кода первой строки табл. 3.3, а если число равно 01, то выход управляемого переключателя соединен с выходом генератора 3, генерирующего ШС на основе слова второй строки, и т.д.

Генератор синхросигналов поддерживает синхронизацию и позволяет обеспечить временные соотношения между сигналами с выходов генераторов ШС и сигналом на выходе источника сообщений. За время передачи одного блока в канал поступает один период ШС. Следовательно,

$$k\tau_{\text{и}} = N\tau_0,$$

где k — длина блока; $\tau_{\text{и}}$ — длительность информационного символа; N — период псевдослучайной последовательности; τ_0 — длительность символа псевдослучайной последовательности.

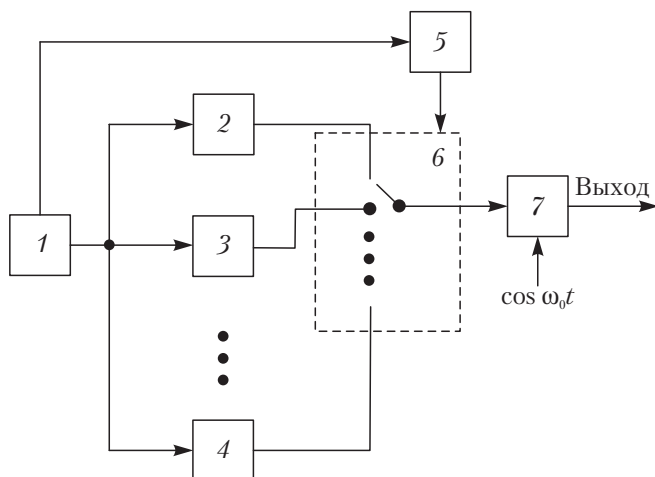


Рис. 3.44. Модулятор шумоподобного сигнала по форме:
 1 — генератор синхросигналов; 2, 3, 4 — соответственно первый, второй и 2^k -й генераторы шумоподобных сигналов; 5 — источник дискретных сообщений;
 6 — управляемый переключатель; 7 — фазовый модулятор

Ширина спектра сигнала на выходе переключателя равна $1/\tau_0 = N/(k\tau_n)$, т.е. в N/k раз больше ширины спектра двоичной информационной последовательности и меньше ширины спектра сигналов на выходах модуляторов АМ и ФМ ШС в k раз.

Модулированный сигнал с выхода переключателя поступает в канал или непосредственно, или преобразуется, например, с помощью фазового модулятора (см. рис. 3.44).

Скорость передачи информации определяется длительностью информационного символа и для всех рассматриваемых модуляций является одинаковой:

$$R = \frac{\log 2^k}{k\tau_n}.$$

Если ширина спектра модулированных сигналов для всех модуляций выбрана одинаковой, то модуляция по форме позволяет получить выигрыш в скорости передачи по сравнению с АМ ШС и ФМ ШС в $R/R_0 = k$ раз. Убедимся в этом.

При амплитудной и фазовой модуляции ШС один период псевдослучайной последовательности равен длительности одного

информационного символа $\tau_{и1}$. При модуляции ШС по форме тот же период равен длине блока $k\tau_{и2}$. Приравнявая длительности символа и блока, получим

$$\tau_{и1} = k\tau_{и2}.$$

Из полученного равенства найдем скорость передачи для случая модуляции ШС по форме

$$R = \frac{1}{\tau_{и2}} = \frac{k}{\tau_{и1}} = kR_0,$$

где R_0 — скорость передачи при АМ или ФМ ШС.

Рассмотрим узкополосную радиосистему передачи информации и радиосистему передачи информации с ШС, которые работают на одной и той же несущей частоте в заданном частотном диапазоне.

На рис. 3.45 приведены спектры узкополосного сигнала 1 и широкополосного ШС: сигналов 2 и 3. Сигналы имеют одинаковые энергии, а их базы определяются неравенствами $B_1 < B_2 < B_3$. При приеме узкополосного сигнала 1 в полосе Δf шумоподобные сигналы 2, 3 создают помеху тем большей мощности, чем меньше их база. С увеличением этой базы интенсивность спектральных компонент сигнала 3 в полосе Δf уменьшается, так как его энергия остается постоянной, а спектральные компоненты ШС распределяются в большем диапазоне. При дальнейшем увеличении базы ШС его спектральные компоненты могут измениться настолько, что их интенсивность будет намного меньше флуктуационного шума входных цепей приемника, осуществляющего прием сигнала 1.

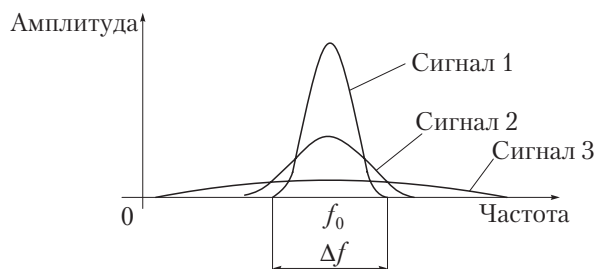


Рис. 3.45. Спектры сигналов

Помеха, создаваемая ШС, становится пренебрежимо малой. Этот пример показывает возможность совмещения в одном и том же частотном диапазоне как обычных систем, так и систем с ШС. Кроме того, в системах с ШС обеспечивается скрытность передачи, если код, определяющий форму ШС, известен только своему корреспонденту, а база ШС выбрана такой величины, при которой уровень полезного сигнала меньше уровня флуктуационного шума, возникающего во входных цепях приемника.



3.8. Модуляция импульсного переносчика

3.8.1. Амплитудно-импульсная модуляция

В качестве переносчика сообщения в технике связи используется, в частности, последовательность видеоимпульсов. Если амплитуды импульсов изменяются в соответствии с передаваемым сообщением, то формируемый сигнал называется амплитудно-импульсно-модулированным (АИМ) сигналом. Различают АИМ сигналы первого и второго рода (АИМ-1, АИМ-2). При АИМ-1 амплитудные значения импульсов изменяются с изменением передаваемого сообщения [модулирующего сигнала $b(t)$], а при АИМ-2 амплитуды импульсов пропорциональны значениям модулирующего сигнала в моменты времени, совпадающие с началом или серединой этих импульсов.

В цифровых системах передачи непрерывных сообщений АИМ-2 реализуется в цифроаналоговом преобразователе при преобразовании двоичного сигнала, действующего на его входе (п. 7.9.2).

Рассмотрим АИМ сигнал первого рода. Схема модулятора и диаграммы, поясняющие его работу, приведены на рис. 3.46, 3.47.

На вход умножителя поступает модулирующий непрерывный сигнал $b(t)$ (см. рис. 3.46, 3.47, *a*), соответствующий передаваемому

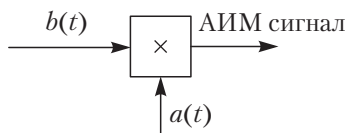


Рис. 3.46. Структурная схема модулятора АИМ сигнала

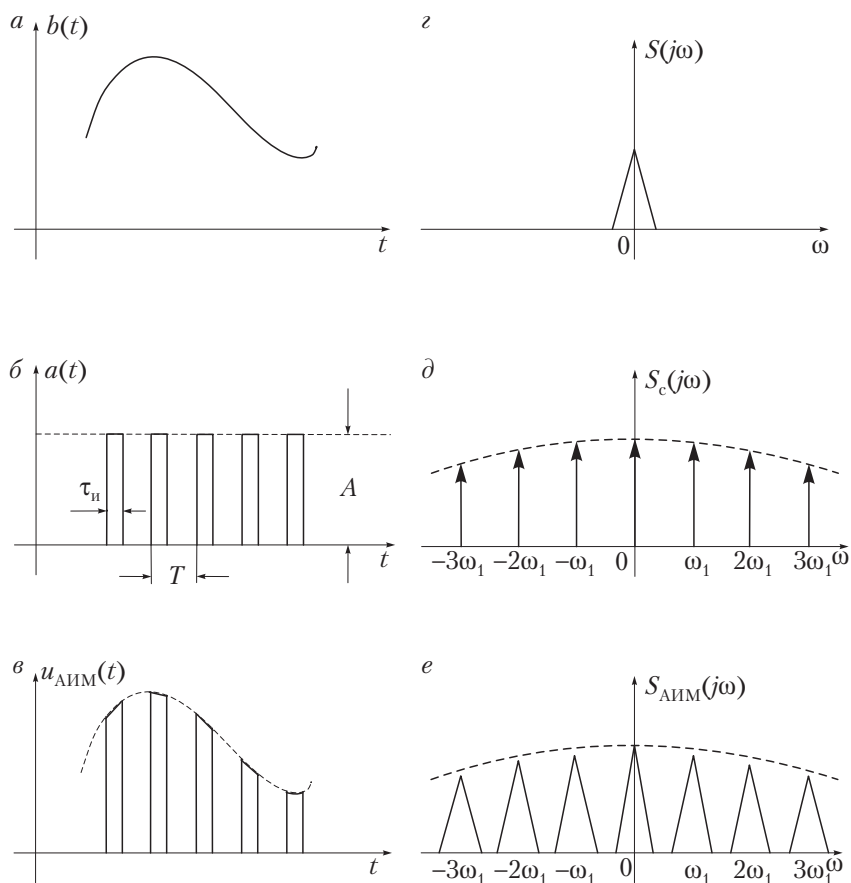


Рис. 3.47. Диаграммы, поясняющие работу модулятора АИМ сигнала

сообщению. На его второй вход подают носитель сообщения в виде видеоимпульсов $a(t)$ (см. рис. 3.46, 3.47, б) с постоянной амплитудой и постоянной длительностью. Период повторения импульсов обычно определяется верхней граничной частотой спектра первичного сигнала.

Так как АИМ сигнал $u_{\text{АИМ}}(t)$ равен произведению (см. рис. 3.46, 3.47, в)

$$u_{\text{АИМ}}(t) = a(t)b(t),$$

то его спектральная плотность определяется сверткой спектральных плотностей модулирующего сигнала и видеоимпульсов:

$$S_{\text{АИМ}}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(jz)S_c[j(\omega - z)]dz. \quad (3.58)$$

Спектральная плотность носителя сообщения

$$S_c[j(\omega)] = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2A\tau_n \sin \frac{k\omega_1\tau_n}{2}}{Tk\omega_1\tau_n/2} \delta(\omega - k\omega_1), \quad (3.59)$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$.

Спектральная плотность периодических видеоимпульсов вычислена в примере 2.4 и показана на рис. 3.47, *д*.

Подставляя выражение (3.59) в (3.58), получим (рис. 3.47, *е*):

$$S_{\text{АИМ}}(j\omega) = \frac{A\tau_n}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\omega_1\tau_n}{2}}{k\omega_1\tau_n/2} S[j(\omega - k\omega_1)]. \quad (3.60)$$

Анализируя полученный результат, находим, что спектральные компоненты группируются около значений частот $\omega = 0, \pm\omega_1, \pm2\omega_1, \pm3\omega_1$ и т.д. и повторяют с точностью до постоянной величины спектр $S(j\omega)$ модулирующего сигнала (рис. 3.47, *з, е*).

При увеличении частоты значения спектральных компонент убывает по закону $(\sin x)/x$, причем скорость убывания определяется длительностью видеоимпульса τ_n . Чем меньше эта длительность, тем медленнее убывают спектральные компоненты и наоборот. Длительность прямоугольного видеоимпульса τ_n определяет ширину спектра АИМ сигнала, которая равна $2\pi/\tau_n$.

3.8.2. Широтно-импульсная и фазо-импульсная модуляция

Сигнал, у которого в соответствии с сообщением изменяются длительности импульсов импульсного переносчика, называется *широтно-импульсно-модулированным (ШИМ)*. Если в соответствии с передаваемым сообщением изменяется задержка импульсов, то такой сигнал называется *фазо-импульсно-модулированным (ФИМ)*.

Структурная схема модулятора ШИМ сигнала приведена на рис. 3.48, а временные диаграммы, поясняющие его работу, — на рис. 3.49.

Генератор импульсов переменной длительности является импульсным устройством. Запуск генератора осуществляется видеоимпульсами $a(t)$ с амплитудой A , длительностью $\tau_{\text{и}}$ и периодом $T = 1/(2F_{\text{в}})$. С приходом каждого импульса генератор вырабатывает импульс с постоянной амплитудой B и длительностью, прямо пропорциональной значению модулирующего сигнала $b(t)$.

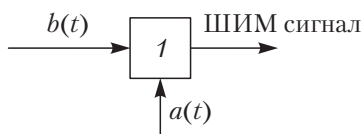


Рис. 3.48. Структурная схема модулятора ШИМ сигнала:
1 — генератор импульсов переменной длительности

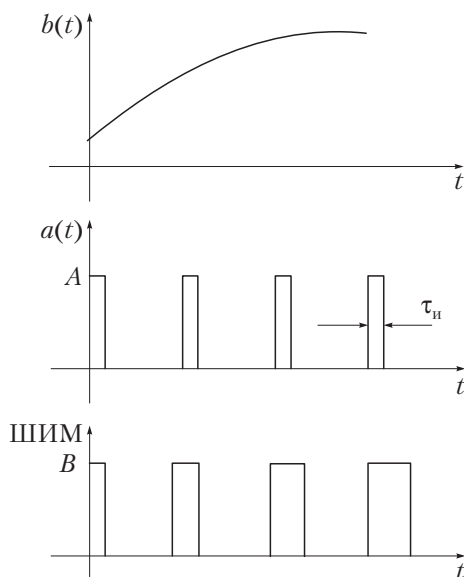


Рис. 3.49. Диаграммы, поясняющие работу модулятора ШИМ сигнала

Формирование ФИМ сигнала поясняется рис. 3.50, 3.51. Схема модулятора содержит генератор импульсов переменной длительности и формирователь выходных импульсов. В качестве генератора часто используют формирователь ШИМ сигнала, рис. 3.49 и 3.51 поясняют работу формирователя выходных импульсов.

Основными операциями формирователя выходных импульсов являются: дифференцирование ШИМ сигнала; ограничение положительных импульсов на выходе дифференцирующей цепи; преобразование отрицательных импульсов на выходе дифференцирующей цепи в импульсы заданной формы и длительности.

Отыскание спектральных плотностей ШИМ и ФИМ сигналов при произвольном модулирующем сигнале (как это было сделано для АИМ сигнала) затруднено. Поэтому их вычисляют для гармонического сигнала.

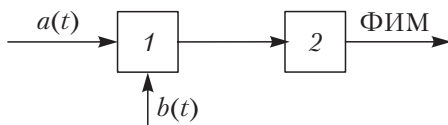


Рис. 3.50. Структурная схема модулятора ФИМ сигнала:
1 — генератор ШИМ сигнала; 2 — формирователь импульсов

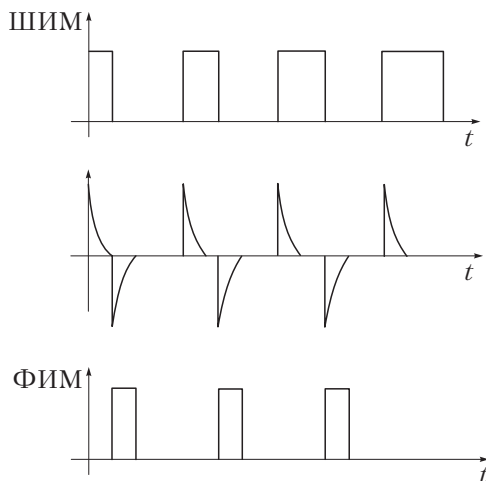


Рис. 3.51. Диаграммы, поясняющие работу модулятора ФИМ сигнала

3.8.3. Импульсно-кодовая модуляция

Преобразование непрерывного первичного аналогового сигнала в код называется *импульсно-кодовой модуляцией* (ИКМ).

Основание кода может быть любым. В системах электросвязи наибольшее распространение получили *двоичные коды*, реализуемые с меньшими аппаратными затратами.

Устройство, преобразующее непрерывный первичный аналоговый сигнал в двоичный код, называется **аналого-цифровым преобразователем** (АЦП). Структурная схема АЦП и диаграммы приведены на рис. 3.52, 3.53. Основными операциями при ИКМ являются операции дискретизации, квантования и кодирования. При дискретизации получают отсчетные значения из непрерывного аналогового сигнала. Эти значения являются скалярным произведением функции $b(t)$, определяющей этот сигнал, и обобщенной функции, равной сумме бесконечного числа дельта-функций:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} b(k\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) dt.$$

В этом нетрудно убедиться, если принять во внимание фильтрующее свойство дельта-функции.

Алгоритм определения отсчетных значений прост и сводится к умножению входного непрерывного сигнала на весьма короткие импульсы, возникающие в моменты времени $k\Delta t$.

Интервал Δt называется *интервалом дискретизации*. Его величина выбирается в соответствии с теоремой Котельникова. Согласно этой теореме, дискретизация не приводит к искажениям, если $\Delta t \leq 1/(2F_{\text{в}})$, где $F_{\text{в}}$ — верхняя граничная частота спектра сигнала $b(t)$. Алгоритм дискретизации аналогичен АИМ.

Полученные в результате дискретизации отсчетные значения далее переводятся в двоичные числа. Вначале каждое значение $b(k\Delta t)$ сравнивается с заранее заданными постоянными уровнями напря-

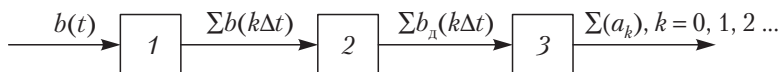


Рис. 3.52. Аналого-цифровой преобразователь:
1 — дискретизатор; 2 — квантователь; 3 — кодер

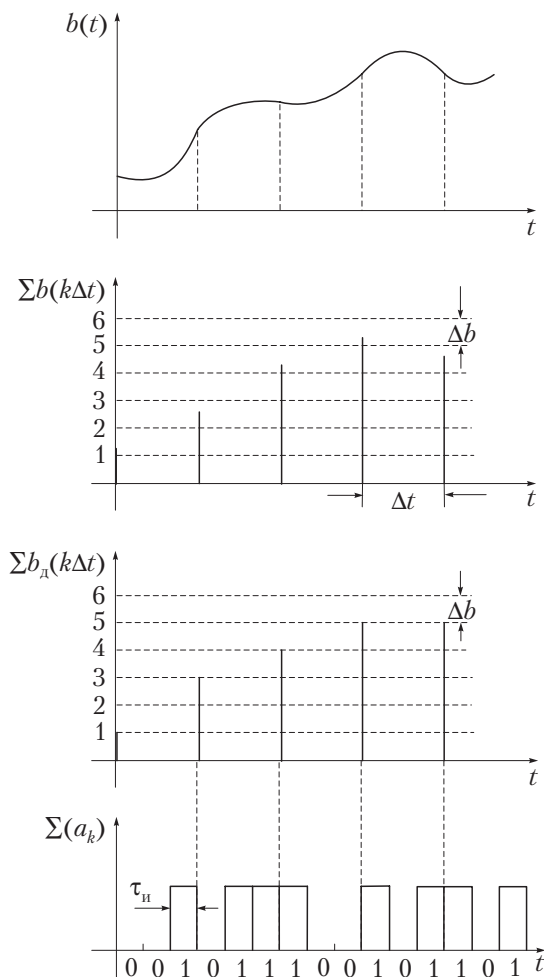


Рис. 3.53. Диаграммы, поясняющие работу АЦП

жения (тока), которые называются *уровнями квантования*. Затем ближайший к отсчетному значению уровень $b_d(k\Delta t)$ переводится в двоичное число $\Sigma(a_k)$.

Процесс замены отсчетного значения ближайшим к нему уровнем называется *квантованием*. Совокупность уровней квантования образует шкалу квантования. Разность значений напряжений

(токов) двух соседних по шкале уровней квантования называется *интервалом квантования*. Если эта разность одинакова для всей шкалы квантования, то такая шкала называется линейной.

При квантовании возникает погрешность

$$b(k\Delta t) - b_d(k\Delta t). \quad (3.61)$$

Ее величина тем меньше, чем больше уровней квантования L .

Таким образом, каждое отсчетное значение заменяется на одно из возможных уровней, которое далее преобразуется в двоичное кодовое слово. Его длина $n = \log L$. Длина двоичного сигнала на выходе АЦП, определяемая длиной кодового слова, не должна превышать интервал дискретизации, т.е.

$$n\tau_n < \Delta t.$$

Следовательно, длительность передачи одного символа кодового слова

$$\tau_n \leq \frac{\Delta t}{n} = \frac{1}{2F_B n} = \frac{1}{2F_B \log L}. \quad (3.62)$$

Если сигнал на выходе АЦП содержит импульсы прямоугольной формы, то ширина его спектра

$$\frac{1}{\tau_n} = 2F_B \log L.$$

3.8.4. Дифференциальная импульсно-кодовая модуляция

В отличие от ИКМ, при дифференциальной импульсно-кодовой модуляции (ДИКМ) по каналу связи передаются двоичные слова, которые соответствуют не отсчетным значениям первичного сигнала $b(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, а разностям

$$\varepsilon(k) = b(k) - \tilde{b}(k),$$

где $\tilde{b}(k)$ — значения сигнала предсказания, сформированного из предыдущих отсчетов.

Поскольку амплитудный диапазон разностей меньше диапазона отсчетных значений, то слова на выходе АЦП при ДИКМ

содержат меньше разрядов, чем при ИКМ при той же частоте дискретизации. При сильных корреляционных связях значение $\tilde{b}(k)$ определяется по правилу

$$\tilde{b}(k) = b(k-1). \quad (3.63)$$

При этом разность отсчетов, передаваемая по каналу связи,

$$\varepsilon(k) = b(k) - b(k-1).$$

Если $b(k) \approx b(k-1)$, то передаваемая разность $\varepsilon(k) = 0$.

На рис. 3.54 приведена упрощенная структурная схема передатчика, в котором реализована ДИКМ. Временные диаграммы, поясняющие работу этой схемы, приведены на рис. 3.55.

Отсчетные значения сигнала подаются на первый вход вычитающего устройства, а на его второй вход поступают значения сигнала предсказания. При реализации правила (3.63) предсказатель является идеальной линией задержки, которая задерживает без искажений отсчетные значения на время, равное интервалу дискретизации Δt .

Пример 3.9. Определить экономию числа разрядов в случае применения ДИКМ по сравнению с ИКМ при преобразовании синусоидального сигнала с частотой 800 Гц.

Решение. Для системы с ИКМ, линейной шкалой квантования и входным аналоговым сигналом

$$b(t) = A \sin 2\pi 800t$$

найдем число разрядов двоичного слова:

$$n_n = \log L_n,$$

где $L_n = 2A/\Delta b$ — число уравнений квантования; A — амплитуда; Δb — интервал квантования.

Число разрядов в системе с ДИКМ

$$n_d = \log L_d,$$

где $L_d = 2\Delta b_{\max}/\Delta b$ — число уравнений квантования; $\Delta b_{\max}$ — максимальная разность отсчетных значений.

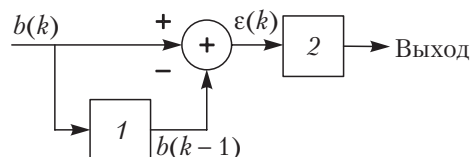


Рис. 3.54. Структурная схема передатчика:
1 — предсказатель; 2 — преобразователь разности в двоичный код

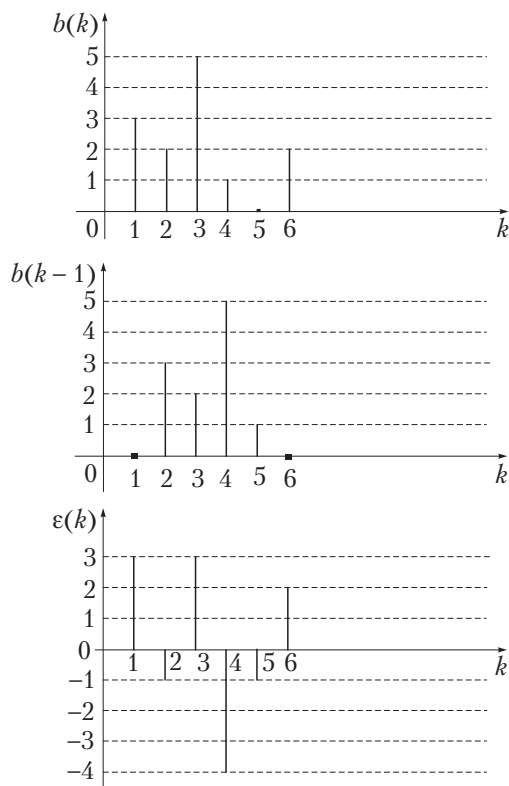


Рис. 3.55. Диаграммы, поясняющие работу схемы на рис. 3.55

Разность $\Delta b_{\max}$ найдем по производной сигнала

$$\frac{db(t)}{dt} = A \cdot 2\pi \cdot 800 \cos 2\pi \cdot 800t.$$

Максимальное значение производной

$$\left| \frac{db(t)}{dt} \right|_{\max} = A \cdot 2\pi \cdot 800.$$

Умножив это значение на интервал дискретизации $\Delta t = 1/(2F_B)$, получим

$$\Delta b_{\max} = \left| \frac{db(t)}{dt} \right|_{\max} \Delta t = \frac{1}{2F_B} \left| \frac{db(t)}{dt} \right|_{\max} = \frac{A \cdot 2\pi \cdot 800}{2F_B}.$$

В цифровых системах связи верхнюю граничную частоту берут равной 4 кГц. Для этого значения частоты $\Delta b_{\max} = 0,628A$.

Экономия числа разрядов определяется разностью

$$\begin{aligned} n_n - n_d &= \log L_n - \log L_d = \\ &= \log \frac{2A \cdot \Delta b}{\Delta b \cdot 2 \cdot 0,628A} = \log \left(\frac{1}{0,628} \right) = 0,67. \end{aligned}$$

Альтернативный способ уменьшения числа разрядов, применяемый в цифровых системах связи, — использование нелинейного преобразования отсчетных значений до их квантования.

Использование этого способа предполагает вначале *компрессирование* (*сжатие*) отсчетных значений, а затем их квантование с использованием линейной шкалы квантования.

На приемном конце восстановленные отсчетные значения преобразуются нелинейным устройством с характеристикой, обратной характеристике компрессирования. Это преобразование называется *экспандированием*. Процесс, при котором сначала осуществляется компрессирование, а затем экспандирование, называют *компандированием*.

3.8.5. Дельта-модуляция

Дельта-модуляция (ДМ) отличается от ДИКМ тем, что по линии передается только знак разности:

$$\varepsilon(k) = b(k) - \tilde{b}(k-1).$$

Знак разности

$$\gamma(k) = \begin{cases} +1, & \text{если } \varepsilon(k) \geq 0, \\ -1, & \text{если } \varepsilon(k) < 0. \end{cases}$$

В передатчике (рис. 3.56) знаки разности подаются на интегратор, на выходе которого вычисляется произведение интервала квантования Δb на сумму всех предыдущих знаков:

$$\tilde{b}(k-1) = \Delta b \sum_{i=0}^{k-1} \gamma(i). \quad (3.64)$$

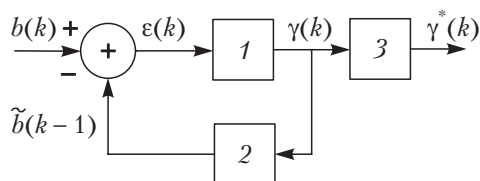


Рис. 3.56. Структурная схема передатчика дельта-модулированного сигнала:

1 — квантователь; 2 — интегратор; 3 — линия связи

В вычитающем устройстве это произведение вычитается из отсчета первичного сигнала $b(k)$.

Если $b(k) > \tilde{b}(k-1)$, на выходе устройства квантования формируется символ 1, а если $b(k) < \tilde{b}(k-1)$, то формируется символ -1 (рис. 3.57). На передачу этих символов (знаков) требуется время, равное интервалу дискретизации.

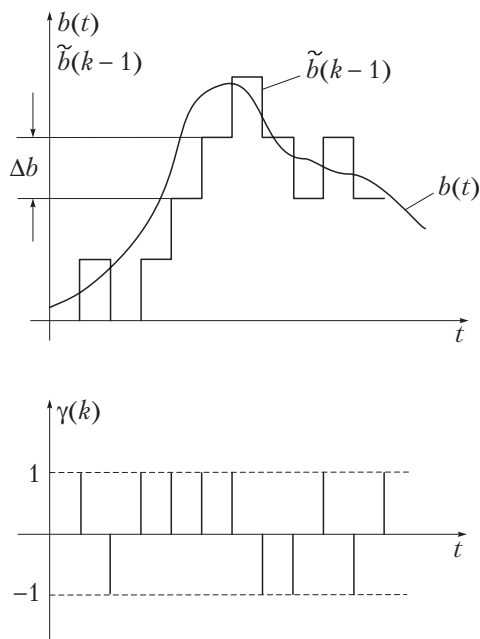


Рис. 3.57. Диаграммы, поясняющие принцип формирования дельта-модулированных сигналов



3.9. Некогерентное детектирование

3.9.1. Некогерентное детектирование непрерывного амплитудно-модулированного сигнала

Некогерентное детектирование оказывается возможным только при приеме АМ сигнала с большим уровнем несущей и если индекс модуляции находится в пределах $1 \geq m \geq 0$.

При АМ-ПН, АМ-ОБП и АМ-БУН, когда $m > 1$, возникают искажения. Это объясняется тем, что некогерентный детектор (рис. 3.58), содержащий диод D и цепочку RC , выделяет огибающую, которая для АМ-ПН, АМ-ОБП и АМ-БУН при $m > 1$ не совпадает с формой модулирующего сигнала (сравните огибающие на рис. 3.16, в, г).

Рассмотрим работу некогерентного детектора при АМ с $m \leq 1$. Когда входное напряжение положительно, через диод протекает ток, а когда отрицательно, ток равен нулю. Это позволяет этот диод считать ключом, который замкнут, если входное напряжение положительно, и разомкнут, если это напряжение отрицательно. Поэтому схему детектора можно представить в виде последовательно соединенной параметрической цепи с коэффициентом передачи $v(t)$

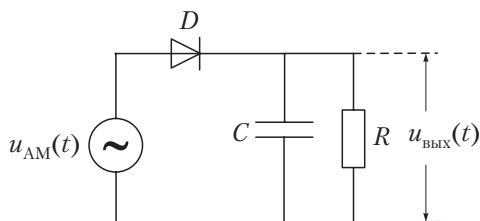


Рис. 3.58. Схема некогерентного детектора

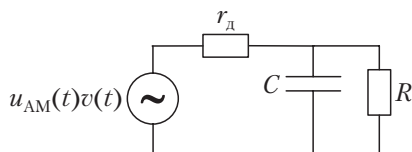


Рис. 3.59. Эквивалентная схема некогерентного детектора

и *фильтра нижних частот* с коэффициентом передачи $K(j\omega)$, т.е. заменить ее эквивалентной схемой (рис. 3.59).

В этой схеме входное напряжение равно произведению двух напряжений: входного АМ сигнала (рис. 3.60, *а*) и напряжения

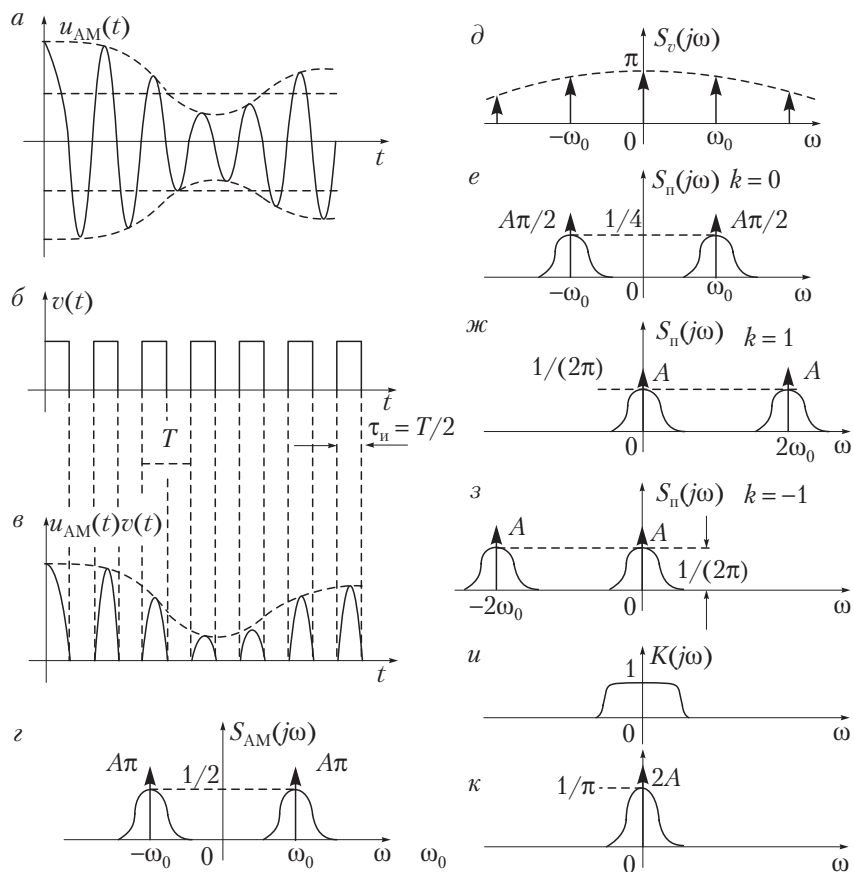


Рис. 3.60. Диаграммы, поясняющие работу некогерентного детектора: *а* — АМ сигнал; *б* — прямоугольные импульсы с единичными амплитудами; *в* — произведение АМ сигнала и прямоугольных импульсов; *г* — спектральная плотность АМ сигнала; *д* — спектральная плотность последовательности прямоугольных импульсов; *е* — спектральная плотность произведения при $k = 0$; *ж* — спектральная плотность произведения при $k = 1$; *з* — спектральная плотность произведения при $k = -1$; *и* — коэффициент передачи ФНЧ; *к* — спектральная плотность сигнала на выходе детектора

в виде последовательности прямоугольных импульсов (рис. 3.60, б) с единичной амплитудой, длительностью импульсов $\tau_n = T/2$ и с периодом повторения, равным периоду высокочастотного заполнения АМ сигнала: $T = 2\pi/\omega_0$ (рис. 3.60, в).

Сигнал на выходе эквивалентной схемы найдем как обратное преобразование Фурье от спектральной плотности выходного сигнала

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = S_{\text{п}}(j\omega)K(j\omega).$$

Спектральная плотность $S_{\text{п}}(j\omega)$ равна свертке спектральных плотностей АМ сигнала и последовательности прямоугольных импульсов $v(t)$:

$$S_{\text{п}}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{АМ}}(jz)S_v[j(\omega - z)]dz, \quad (3.65)$$

где $S_{\text{АМ}}(j\omega)$ — спектральная плотность АМ сигнала (рис. 3.60, з); $S_v(j\omega)$ — спектральная плотность последовательности прямоугольных импульсов (рис. 3.60, д).

Вычисление спектральной плотности $S_v(j\omega)$ аналогично вычислению, приведенному в примере 3.4. Функция $v(t)$ (см. рис. 3.60, б) записывается в виде ряда Фурье в тригонометрической форме, а затем вычисляется ее спектральная плотность:

$$S_v(j\omega) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\pi/2}{k\pi/2} \delta(\omega - k\omega_0), \quad (3.66)$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$ — несущая частота АМ сигнала.

Подставим формулу (3.66) в (3.65) и с учетом фильтрующего свойства дельта-функции получим

$$S_{\text{п}}(j\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2} S_{\text{АМ}}[j(\omega - k\omega_0)]. \quad (3.67)$$

Проанализируем полученное выражение. Спектральная плотность произведения $u_{\text{АМ}}(t)v(t)$ является взвешенной суммой сдвинутых по оси частот спектральных плотностей АМ сигнала. Вес этих составляющих определяется функцией $\left(\sin \frac{k\pi}{2}\right) / \frac{k\pi}{2}$ для чисел k ,

которые принимают целочисленные значения в интервале $[-\infty; \infty]$.
Имеем:

$$\begin{aligned} S_{\Pi}(j\omega) &= \frac{1}{2} S_{\text{AM}}(j\omega), \quad k = 0; \\ S_{\Pi}(j\omega) &= \frac{1}{2} \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} S_{\text{AM}}[j(\omega - \omega_0)] = \frac{1}{\pi} S_{\text{AM}}[j(\omega - \omega_0)], \quad k = 1, \\ S_{\Pi}(j\omega) &= \frac{1}{2} \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} S_{\text{AM}}[j(\omega + \omega_0)] = \frac{1}{\pi} S_{\text{AM}}[j(\omega + \omega_0)], \quad k = -1. \end{aligned}$$

Эти составляющие показаны на рис. 3.60, e –з соответственно.

Полагая, что фильтр нижних частот пропускает только те спектральные составляющие $S_{\Pi}(j\omega)$, которые группируются около нулевой частоты (см. рис. 3.60, u), получим выражение для спектральной плотности сигнала на выходе детектора (см. рис. 3.60, κ):

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = \left\{ \frac{1}{\pi} S_{\text{AM}}[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{\pi} S_{\text{AM}}[j(\omega + \omega_0)] \right\} K(j\omega), \quad (3.68)$$

где $K(j\omega)$ — коэффициент передачи фильтра.

Если $K(j\omega) = 1$, то

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} S(j\omega) + \frac{1}{2} S(j\omega) + 2A\pi\delta(\omega) \right\} = \frac{1}{\pi} S(j\omega) + 2A\delta(\omega),$$

где $S(j\omega)$ — спектральная плотность модулирующего сигнала.

Сигнал на выходе некогерентного детектора

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} S(j\omega) + 2A\delta(\omega) \right] e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} b(t) + \frac{1}{2\pi} 2A[e^0] = \frac{1}{\pi} [A + b(t)]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Выражение (3.69) содержит постоянное значение A/π , определяющее постоянное напряжение и функцию $b(t)/\pi$, описывающую переменное напряжение, которое совпадает по форме с модулирующим сигналом $b(t)$.

3.9.2. Некогерентное детектирование двоичных сигналов

Некогерентное детектирование применяется при приеме двоичных АМ и ЧМ сигналов. Оно мало отличается от некогерентного детектирования непрерывных АМ сигналов. Некоторые особен-

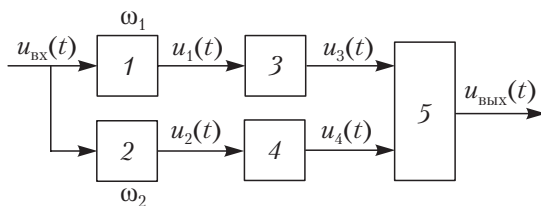


Рис. 3.61. Некогерентный детектор двоичного ЧМ сигнала:
 1, 2 — полосовые фильтры; 3, 4 — амплитудные детекторы;
 5 — вычитающее устройство

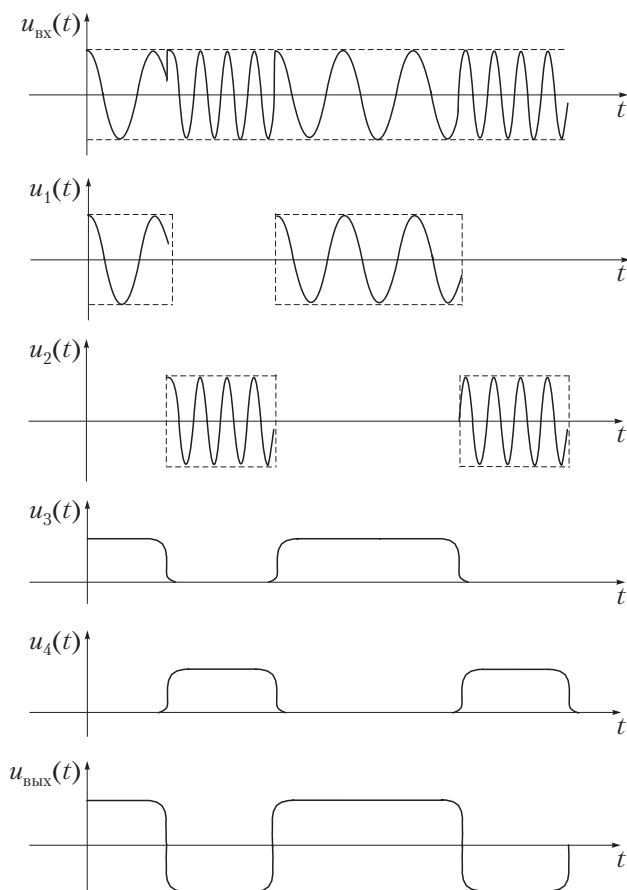


Рис. 3.62. Диаграммы, поясняющие работу двоичного ЧМ детектора

ности связаны с импульсным характером сигналов. Это предъявляет определенные требования к параметрам фильтра нижних частот и полупроводникового диода.

При некогерентном детектировании двоичных ЧМ сигналов используются два канала обработки. Каждый канал содержит полосовой фильтр и амплитудный некогерентный детектор.

Полосовые фильтры, настроенные на несущие частоты носителей двоичных кодовых последовательностей, разделяют четные и нечетные элементы ЧМ сигнала, которые в дальнейшем детектируются амплитудными некогерентными детекторами. При вычитании выделенных на их выходах двоичных кодовых последовательностей образуется выходной сигнал — принимаемая информационная последовательность (рис. 3.61, 3.62).

3.9.3. Детектирование непрерывного частотно-модулированного сигнала

Один из самых распространенных методов детектирования основан на преобразовании ЧМ сигнала в АМ сигнал. Диаграммы, поясняющие этот метод, приведены на рис. 3.63, а вариант детектора — на рис. 3.64. Частотный детектор содержит два резонансных контура, два диода и два фильтра нижних частот, выполненных на RC -цепях. Резонансные контуры несколько расстроены относительно средней частоты ω_0 ЧМ сигнала.

Аппроксимируем участки кривых АЧХ контуров линейными функциями (рис. 3.63, а):

$$u_1(\omega) = -\frac{2u_1}{\Delta\omega_0}\omega + \frac{2u_1}{\Delta\omega_0}\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega_0}{2}\right), \quad (3.70)$$

$$u_2(\omega) = \frac{2u_1}{\Delta\omega_0}\omega - \frac{2u_1}{\Delta\omega_0}\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega_0}{2}\right), \quad (3.71)$$

где u_1 — значение напряжения на выходе контуров при $\omega = \omega_0$; $\Delta\omega_0 = \omega_2 - \omega_1$ — разность значений частот, которые совпадают с точками пересечений прямых линий с осью ω .

Каждое из приведенных уравнений найдено по исходному уравнению

$$u(\omega) = a\omega + b.$$

Например, постоянные, определяющие уравнение (3.71), равны: $a = u_0/\omega_1$; $b = -u_0$.

Из подобных треугольников OAB и BDC (см. рис. 3.63, *a*) найдем

$$\frac{u_0}{\omega_1} = \frac{2u_1}{\Delta\omega_0}, \quad u_0 = \frac{2u_1}{\Delta\omega_0} \omega_1 = \frac{2u_1}{\Delta\omega_0} \left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega_0}{2} \right).$$

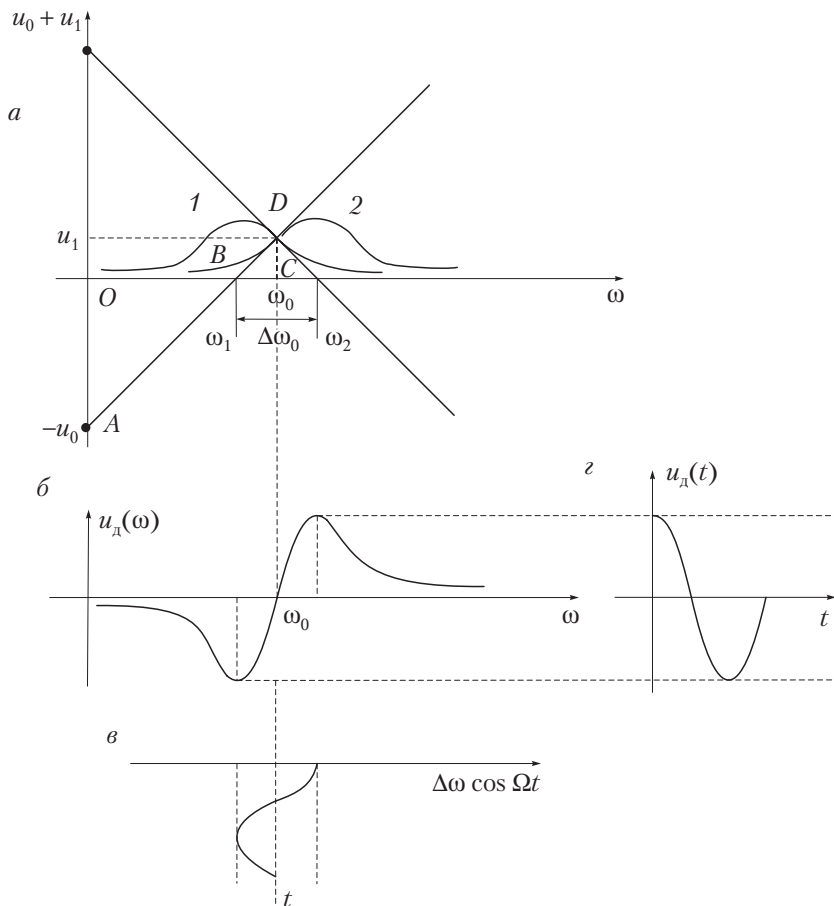


Рис. 3.63. Диаграммы, поясняющие работу детектора непрерывного ЧМ сигнала:

a — АЧХ резонансных контуров; *б* — характеристика детектора;
в — модулирующий сигнал; *г* — напряжение на выходе детектора

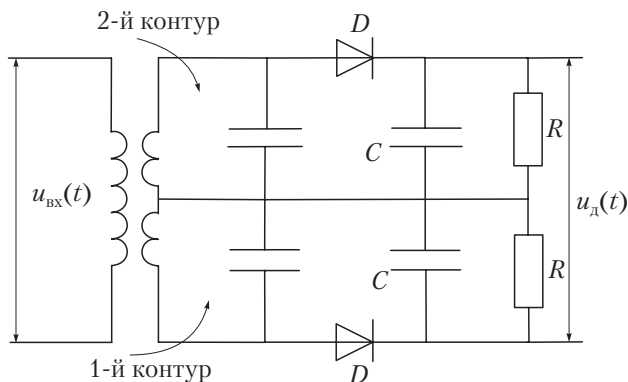


Рис. 3.64. Детектор непрерывного ЧМ сигнала

Разность левых и правых частей уравнений (3.71), (3.70) определяет линейную часть характеристики детектора:

$$u_{\text{д}}(\omega) = \frac{4u_1}{\Delta\omega_0}\omega - \frac{4u_1\omega_0}{\Delta\omega_0} = \frac{4u_1}{\Delta\omega_0}(\omega - \omega_0) = K_{\text{д}}(\omega - \omega_0), \quad (3.72)$$

где $K_{\text{д}} = 4u_1/\Delta\omega_0$ — крутизна характеристики детектора.

Характеристика детектора показана на рис. 3.63, б. Она получена вычитанием из значений кривой 2 соответствующих значений кривой 1 на рис. 3.63, а.

Найдем отклик частотного детектора на входной сигнал, считая, что девиация $\Delta\omega < \Delta\omega_0$. Подставляя выражение для частоты сигнала

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t \quad (3.73)$$

в уравнение (3.72), получим

$$u_{\text{д}}(\omega) = \frac{4u_1}{\Delta\omega_0}(\omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t - \omega_0) = K_{\text{д}}\Delta\omega \cos \Omega t.$$

Отклик частотного детектора на входной ЧМ сигнал прямо пропорционален модулирующему сигналу (рис. 3.63, в). На рис. 3.63, з показано напряжение на выходе детектора, которое определяется девиацией частоты $\Delta\omega$ и крутизной $K_{\text{д}}$ характеристики детектора.

Частотный детектор работает следующим образом. При поступлении на его вход ЧМ сигнала с постоянной амплитудой и с частотой (3.73) на выходах контуров появляются модулированные как по частоте, так и по амплитуде сигналы.

Убедимся в изменении амплитуды напряжения на выходе 2-го контура, подставив в формулу (3.71) формулу (3.73) для частоты сигнала:

$$\begin{aligned} u &= \frac{2u_1}{\Delta\omega_0}(\omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t) - \frac{2u_1}{\Delta\omega_0}\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega_0}{2}\right) = \\ &= u_1 + \frac{2u_1\Delta\omega}{\Delta\omega_0} \cos \Omega t = u_1[1 + m \cos \Omega t], \end{aligned}$$

где $m = 2\Delta\omega/\Delta\omega_0$.

Заметим, что ЧМ сигнал перед подачей на частотный детектор ограничивается по амплитуде двусторонним ограничителем для устранения паразитной амплитудной модуляции сигнала. Если эту модуляцию не устранить, то на выходе частотного детектора появится помеха, ухудшающая качество воспроизведения модулирующего сигнала. Причина возникновения этой паразитной амплитудной модуляции обусловлена неравномерностью АЧХ тракта до детектора.

3.9.4. Детектирование сигнала с амплитудно-импульсной модуляцией

Детектором АИМ сигнала является фильтр нижних частот (ФНЧ). Этот фильтр пропускает на выход только те спектральные компоненты, которые расположены около нулевой частоты (см. рис. 3.47, е).

Обратное преобразование Фурье этих спектральных компонент дает сигнал на выходе ФНЧ:

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{АИМ}}(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{A\tau_{\text{и}}}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{A\tau_{\text{и}}}{T} b(t), \end{aligned}$$

где $S_{\text{АИМ}}(j\omega)$ — спектральная плотность АИМ сигнала, определяемая формулой (3.60); $K(j\omega)$ — коэффициент передачи ФНЧ; A , $\tau_{\text{и}}$ — соответственно амплитуда и длительность импульсов; $b(t)$ — модулирующий сигнал.

Сигнал на выходе ФНЧ с точностью до постоянной величины совпадает с модулирующим сигналом $b(t)$.

3.9.5. Декодирование сигнала с импульсно-кодовой модуляцией

Принимаемый сигнал с ИКМ определяется информационной последовательностью единиц и нулей. Он реализуется следующими друг за другом видеоимпульсами в соответствии с передачей символов 1 в информационной последовательности. Отрезки последовательности в интервалах дискретизации определяют двоичные числа, выражающие значения ближайших уровней квантования к отсчетным значениям первичного сигнала.

В приемнике двоичные сигналы преобразуются в АИМ-2 сигнал, состоящий из коротких модулированных по амплитуде видеоимпульсов. Значения амплитуд этих импульсов определяются двоичными числами действующих на входе приемника двоичных сигналов. Полученный таким способом АИМ-2 сигнал далее фильтруется ФНЧ.

Устройство, осуществляющее это преобразование, называется **цифроаналоговым преобразователем (ЦАП)** (рис. 3.65). На его входе действует двоичная информационная последовательность, полученная преобразованием в передатчике первичного сигнала $b(t)$ в код. На выходе ЦАП действует оценка переданного первичного сигнала $b^*(t)$.

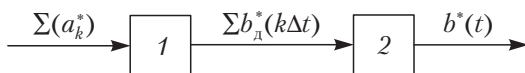


Рис. 3.65. Структурная схема ЦАП:
1 — преобразователь двоичных сигналов в оценки отсчетных значений; 2 — ФНЧ

Теоретические основы ЦАП определены теоремой Котельникова (см. § 2.7).

3.9.6. Декодирование сигнала с дифференциальной импульсно-кодовой модуляцией

Прием сигнала с ДИКМ определяется его формированием в передатчике.

Двоичные слова с выхода линии связи поступают на вход преобразователя, который восстанавливает разности $\epsilon^*(k)$ между

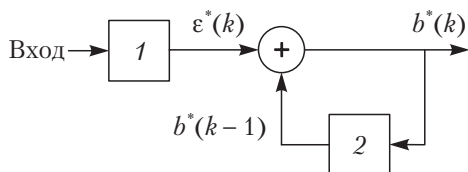


Рис. 3.66. Структурная схема декодирующего устройства:

1 — преобразователь двоичного слова в оценку разности; 2 — предсказатель

соседними отсчетными значениями. В сумматоре эти разности суммируются с выходным сигналом $b^*(k-1)$ предсказателя. В результате на выходе сумматора формируется оценка

$$b^*(k) = \varepsilon^*(k) + b^*(k-1), \quad (3.74)$$

которая определяет переданный по каналу первичный сигнал (рис. 3.66).

Диаграммы, приведенные на рис. 3.67, поясняют работу схемы при отсутствии помех в линии связи. Применяя правило формирования оценки, находим значения оценок:

$$b^*(0) = \varepsilon^*(0) + b^*(-1) = 0,$$

так как $\varepsilon^*(0)$, $b^*(-1) = 0$,

$$b^*(1) = \varepsilon^*(1) + b^*(0) = \varepsilon^*(1) + \varepsilon^*(0),$$

$$b^*(2) = \varepsilon^*(2) + b^*(1) \quad \text{и т.д.}$$

3.9.7. Декодирование дельта-модулированного сигнала

Структурная схема декодирующего устройства (рис. 3.68) содержит точно такой же интегратор, как в передатчике (см. рис. 3.56). Разнополярные импульсы с выхода линии связи суммируются в этом интеграторе по правилу, аналогичному правилу (3.64). Полученное на выходе ступенчатое напряжение сглаживается ФНЧ. Оценка передаваемого сообщения $b^*(t)$ на выходе ФНЧ зависит от уровня шума в линии связи и от шага квантования Δb . Размер шага определяет величину шума квантования. Чем меньше шаг и чем выше частота дискретизации, тем меньше этот шум. К сожалению, уменьшение шага квантования может привести к искажениям из-за

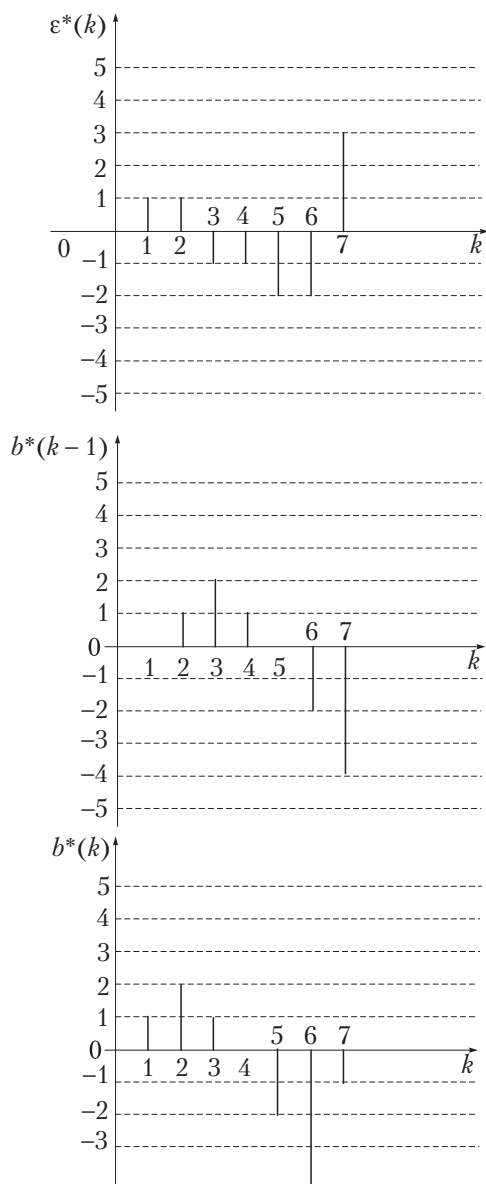


Рис. 3.67. Диаграммы, поясняющие работу схемы на рис. 3.66 при отсутствии помех в канале связи

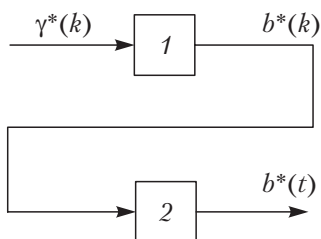


Рис. 3.68. Структурная схема декодирующего устройства:
1 — интегратор; 2 — ФНЧ

быстрого изменения сообщения. В этом случае возникают «перегрузки по наклону», когда оценка $b^*(t)$ запаздывает по отношению к сообщению $b(t)$. Для того чтобы устранить это нежелательное явление, нужно обеспечить выполнение неравенства

$$\Delta b \geq |b'(t)|_{\max} \Delta t, \quad (3.75)$$

где $|b'(t)|_{\max}$ — максимальное значение крутизны сообщения.

Учитывая, что

$$\Delta b = \frac{2|b(t)|_{\max}}{L},$$

где $|b(t)|_{\max}$ — максимальное значение сообщения; L — число уровней квантования, из неравенства (3.75) найдем соотношение для интервала дискретизации:

$$\Delta t \leq \frac{2|b(t)|_{\max}}{L|b'(t)|_{\max}}. \quad (3.76)$$

С ростом величины Δb уменьшается «перегрузка по наклону», но растет шум квантования. Поэтому окончательный выбор интервала квантования производится исходя из компромиссного удовлетворения этим двум требованиям.

Для передачи телефонных сообщений требуемая частота дискретизации не менее 150...200 кГц. В случае использования восьмиразрядной ИКМ тактовая частота составляет 64 кГц, т.е. меньше тактовой частоты при ДМ. Это означает, что ширина полосы линейного тракта для передачи сигнала при ДМ больше. Требуемая частота дискретизации существенно меньше при использовании ДМ с переменным шагом квантования. Системы связи, в которых

используется такой вид модуляции, являются *адаптивными*. В этих системах удастся снизить частоту дискретизации до значений, которые даже ниже, чем в системах с ИКМ.

3.9.8. Детектирование сигналов с широтно-импульсной модуляцией и с фазо-импульсной модуляцией

Детектирование ШИМ сигнала возможно с помощью ЦАП, если этот сигнал предварительно преобразуется в двоичное число. Структурная схема детектора приведена на рис. 3.69.

Детектор ШИМ сигнала можно использовать для детектирования ФИМ сигнала, если предварительно преобразовать его в ШИМ сигнал (рис. 3.70).

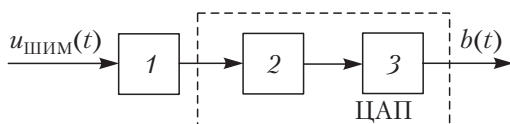


Рис. 3.69. Детектор сигнала с ШИМ:

1 — преобразователь ширины импульса в двоичное слово; 2 — преобразователь двоичного слова в значение амплитуды короткого видеоимпульса; 3 — ФНЧ



Рис. 3.70. Детектор сигнала с ФИМ:

1 — преобразователь ФИМ сигнала в ШИМ сигнал; 2 — детектор ШИМ сигнала, строящийся с использованием ЦАП



3.10. Когерентное детектирование

3.10.1. Математическая модель когерентного детектора

Когерентное детектирование используется для выделения модулирующих сигналов из принимаемых АМ-ПН, АМ-ПН-ОБП, ФМ и ЧМ сигналов, а также для выделения модулирующих двоичных

сигналов из двоичных АМ, ЧМ, ФМ и ОФМ сигналов; ШС, модулированных по амплитуде, знаку и форме; сигналов с многократной ФМ и ОФМ, сигналов с КАМ.

Когерентное детектирование можно применять и при приеме непрерывного АМ сигнала с большим уровнем несущей. Но на практике этот способ детектирования не нашел применения, так как когерентный детектор по ряду показателей (габариты, вес, потребляемая мощность, стоимость) уступает некогерентному детектору.

Когерентное детектирование называют также *синхронным*, а когерентный детектор — *синхронным детектором*.

Структурная схема когерентного детектора приведена на рис. 3.71. На первый вход умножителя подают входной модулированный сигнал $u_{\text{вх}}(t)$, а на второй — опорный сигнал $u_{\text{оп}}(t)$, который генерируется (формируется) в приемнике.

Особенностью приема АМ-ПН и АМ-ПН-ОБП сигналов является то, что опорные сигналы нельзя получить фильтрацией АМ-ПН и АМ-ПН-ОБП сигналов, так как в их спектрах нет спектральных компонент на несущей частоте. Это существенно усложняет прием.

Рассмотрим работу когерентного детектора, полагая, что начальная фаза опорного сигнала совпадает с начальной фазой принимаемого. Входной сигнал

$$u_{\text{вх}}(t) = b(t)\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где $b(t)$ — модулирующий непрерывный или дискретный сигнал; ω_0 — несущая частота; φ — начальная фаза.

Опорный сигнал

$$u_{\text{оп}}(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

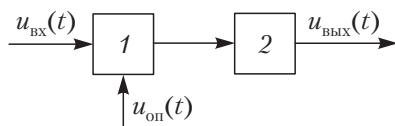


Рис. 3.71. Структурная схема когерентного детектора:
1 — умножитель; 2 — ФНЧ

Сигнал на выходе умножителя

$$u_{\Pi}(t) = b(t) \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = b(t)[0,5 + 0,5 \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)].$$

Низкочастотная часть этого сигнала

$$u_{\text{вых}}(t) = b(t)/2$$

выделяется на выходе ФНЧ.

3.10.2. Когерентное детектирование амплитудно-модулированного сигнала с одной боковой полосой

Пусть на вход когерентного детектора подается АМ-ОБП сигнал с нижней боковой полосой. Его спектральные компоненты определяются формулой (3.39) и зависят от спектральной плотности модулирующего сигнала (рис. 3.72, а). Спектральная плотность АМ-ОБП сигнала приведена на рис. 3.72, б.

В умножителе входной сигнал умножается на когерентный опорный сигнал, спектральная плотность которого (рис. 3.72, в) определяется формулой (3.29).

Спектральная плотность произведения этих двух сигналов (рис. 3.72, з)

$$\begin{aligned} S_{\Pi}(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{АМ-ОБП}}(jz) \pi [\delta(\omega - z + \omega_0)] + \delta[(\omega - z - \omega_0)] dz = \\ &= \frac{1}{4} \{S^+[j(\omega + 2\omega_0)] + S^-[j(\omega)] + S^+[j(\omega)] + S^-[j(\omega - 2\omega_0)]\}, \end{aligned}$$

где $S^+(j\omega) = S(j\omega)$, $\omega > 0$; $S^-(j\omega) = S(j\omega)$, $\omega < 0$; $S^-(j\omega) + S^+(j) = S(j\omega)$ — спектральная плотность модулирующего сигнала.

Так как высокочастотные составляющие подавляются фильтром нижних частот, то спектральная плотность сигнала на его выходе определяется только теми составляющими, которые группируются около нулевой частоты:

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = S_{\Pi}(j\omega)K(j\omega) = 0,25\{S^-[j(\omega)] + S^+[j(\omega)]\} = 0,25S(j\omega),$$

где $K(j\omega)$ — коэффициент передачи фильтра нижних частот (рис. 3.72, д).

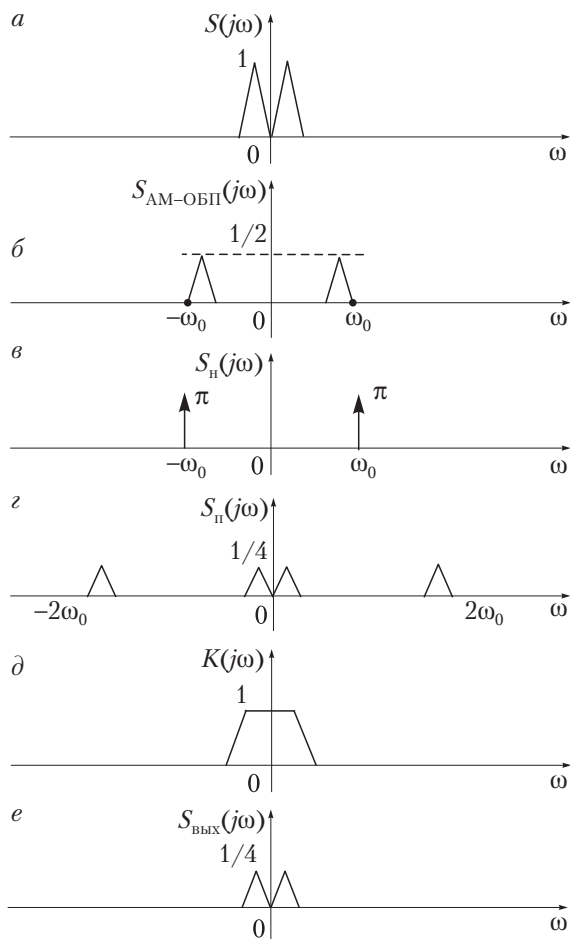


Рис. 3.72. Диаграммы, поясняющие когерентное детектирование АМ-ПН-ОБП сигнала

Спектральная плотность сигнала на выходе детектора (рис. 3.72, *e*) по форме не отличается от спектральной плотности модулирующего сигнала. Поэтому модулирующий сигнал воспроизводится без искажений:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{4} b(t).$$

3.10.3. Когерентное детектирование двоичного фазо-модулированного сигнала

Пусть на входе когерентного детектора напряжение

$$u_{\text{вх}}(t) = Aq(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_1),$$

где A — амплитуда сигнала; $q(t)$ — принимаемая видеопоследовательность, определяемая информационным двоичным словом над алфавитом $-1, 1$; ω_0 — несущая частота; φ_1 — начальная фаза двоичного ФМ сигнала, случайность которой обусловлена помехами.

Напряжение опорного колебания

$$u_{\text{оп}}(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_2),$$

где φ_2 — начальная фаза.

Фаза φ_2 почти повторяет фазу φ_1 входного напряжения при малых помехах, т.е. также является случайной. С ростом интенсивности помех ошибка в воспроизведении фазы опорного сигнала возрастает, а фаза может меняться на 180° .

Напряжение на выходе умножителя когерентного детектора равно

$$\begin{aligned} Aq(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_1)\cos(\omega_0 t + \varphi_2) &= \\ = \frac{Aq(t)}{2} [\cos\Delta\varphi + \cos(2\omega_0 t + \varphi_1 + \varphi_2)], \end{aligned}$$

где $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Выходное напряжение зависит от разности фаз $\Delta\varphi$:

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{Aq(t)}{2} \cos\Delta\varphi. \quad (3.77)$$

Если из-за присутствия помех разность фаз станет равной 180° , то в этом случае $\cos\Delta\varphi$ будет равен -1 , $u_{\text{вых}}(t) = -Aq(t)/2$. Тогда при приеме возникает явление так называемой *обратной работы*, когда вместо единиц информационного слова выделяются нули и наоборот.

3.10.4. Детектирование сигналов с относительной фазовой модуляцией

Устранение явления обратной работы возможно при переходе от ФМ к ОФМ, изобретенной Н.Т. Петровичем.

При детектировании сигналов с ОФМ применяется автокорреляционный, корреляционный и когерентный способы приема. Каждый из них имеет преимущества и недостатки. Ниже рассматривается когерентный прием, который при оптимальной структуре детектора и идеальной синхронизации обеспечивает максимальную помехоустойчивость.

Вариант детектирования сигнала с однократной ОФМ, в котором реализуется алгоритм когерентного приема, представлен структурной схемой (рис. 3.73). В корреляторе 1, который содержит последовательно соединенные умножитель 2 и интегратор 3, вычисляются значения взаимной корреляционной функции (ВКФ) (скалярные произведения) между принимаемым сигналом $u_{\text{вх}}(t) = Ac(t)\cos\omega_0 t$ и опорным сигналом $u_{\text{оп}}(t) = A\cos\omega_0 t$ с выхода формирователя опорного сигнала 5.

Значение ВКФ между первой посылкой сигнала и опорным сигналом равно

$$\int_0^{\tau_n} u_{\text{вх}}(t)u_{\text{оп}}(t)dt = A^2 \int_0^{\tau_n} c(t)\cos^2\omega_0 t dt = ac_{i-1},$$

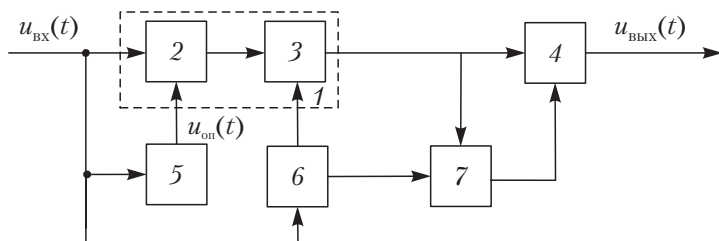


Рис. 3.73. Структурная схема оптимального приемника сигнала с однократной ОФМ:

1 — коррелятор; 2, 4 — умножители; 3 — интегратор; 5 — формирователь опорного сигнала; 6 — формирователь управляющих импульсов; 7 — запоминающее устройство

где $\tau_{\text{и}}$ — время интегрирования произведения входного и опорного сигналов, равное длительности первой посылки; A — амплитуда сигнала; $c(t)$ — знакопеременная функция с единичной амплитудой, знак которой в пределах длительности посылки сигнала определяется символом относительного кода; ω_0 — частота; $c_{i-1} \in [-1, 1]$ — символ относительного кода, определяющий функцию $c(t)$ в пределах первой посылки сигнала; a — постоянный коэффициент, численно равный энергии посылки сигнала.

Значение ВКФ ac_{i-1} поступает на вход запоминающего устройства 7 и хранится в течение времени приема второй посылки сигнала.

Значение ВКФ между второй посылкой и опорным сигналом равно

$$\int_{\tau_{\text{и}}}^{2\tau_{\text{и}}} u_{\text{вх}}(t)u_{\text{оп}}(t)dt = A^2 \int_{\tau_{\text{и}}}^{2\tau_{\text{и}}} c(t)\cos^2 \omega_0 t dt = ac_i,$$

где c_i — символ относительного кода второй посылки сигнала.

В умножителе 4 вычисляется произведение $a^2 c_{i-1} c_i$, которое определяет принятый информационный символ $b_i \in [-1; 1]$. Значение ВКФ ac_i поступает на вход запоминающего устройства 7 и хранится в нем в течение времени приема очередной посылки. В течение этого времени с помощью коррелятора 1 вычисляется значение ВКФ ac_{i+1} . В умножителе 4 оно умножается на значение ac_i с выхода запоминающего устройства. Результат умножения определяет принятый символ b_{i+1} и т.д. В когерентном приемнике используют синфазное опорное напряжение, синхронный отсчет вычисленных значений ВКФ, синхронный сброс результатов интегрирования и синхронное очищение запоминающего устройства. Для этого в структурной схеме имеются необходимые устройства, включая формирователь опорного сигнала 5 и формирователь управляющих импульсов 6.

В структурной схеме, приведенной на рис. 3.74, реализуется оптимальный прием сигнала с многократной ОФМ. Она содержит $m = 2^k$ каналов, в каждый из которых входит коррелятор; генератор когерентного колебания; m фазовращателей, позволяющих из сигнала с выхода генератора когерентного колебания получить опорные сигналы с разными начальными фазами $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$; схему

сравнения, запоминающее устройство и схему вычитания. Другие устройства, поддерживающие стабильность когерентного колебания на выходе генератора, обеспечивающие сброс напряжений, накопленных интеграторами, а также очищение запоминающего устройства, на рис. 3.74 не показаны.

Рассмотрим работу структурной схемы в интервале приема двух посылок сигнала с номерами $i-1$, i . При приеме $(i-1)$ -й посылки в m корреляторах вычисляются значения ВКФ между этой посылкой и опорными сигналами с начальными фазами $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$. Вычисленные значения сравниваются между собой в схеме сравнения. Наибольшее из них определяет номер $s \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ варианта фазы переданного в $(i-1)$ -й посылке. Этот номер, сформиро-

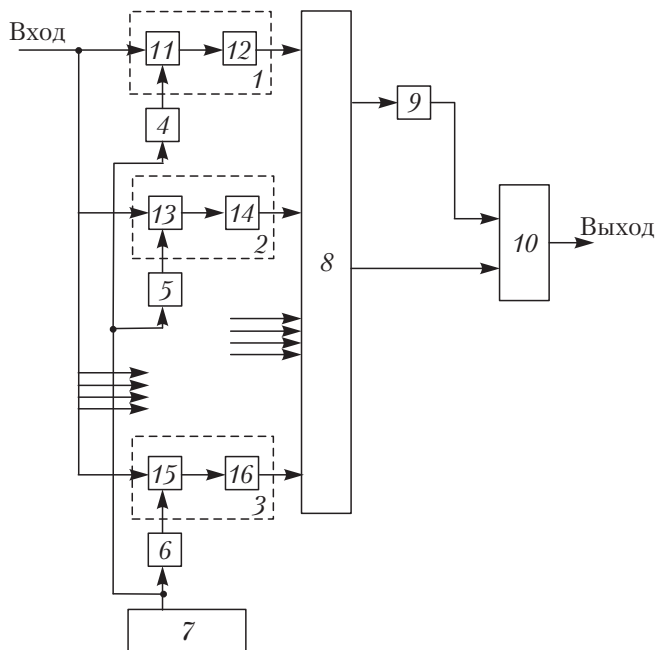


Рис. 3.74. Структурная схема оптимального приемника сигнала с многократной ОФМ:

1, 2 — корреляторы; 3 — m -й коррелятор; 4 — первый фазовращатель; 5 — второй фазовращатель; 6 — m -й фазовращатель; 7 — генератор когерентного колебания; 8 — схема сравнения; 9 — запоминающее устройство; 10 — вычитающее устройство; 11, 13, 15 — умножители; 12, 14, 16 — интеграторы

ванный в схеме сравнения, записывается и хранится в запоминающем устройстве в течение приема i -й посылки сигнала. При приеме i -й посылки описанный выше процесс повторяется и наибольшее вычисленное значение ВКФ на выходе одного из корреляторов определяет номер $r \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ варианта фазы этой посылки. Разность фаз $\psi_i = \phi_i - \phi_{i-1}$ принятых посылок сигнала определяется разностью номеров тех корреляторов, на выходах которых наблюдались максимальные значения напряжений (ВКФ). Эта разность вычисляется в вычитающем устройстве после поступления на его входы числа r с выхода схемы сравнения и числа s с выхода запоминающего устройства. По числу $r - s$ в соответствии с модуляционным кодом на выходе схемы вычитания формируется принятое по каналу двоичное слово блока.

3.10.5. Детектирование шумоподобных сигналов

Цель детектирования та же, что и для простых сигналов, — выделение модулирующего сигнала. Основным способом детектирования ШС является когерентный способ.

Детектор шумоподобного сигнала, модулированного по форме, является многоканальным (рис. 3.75).

Число каналов в структурной схеме $m = 2^k$, где k — длина блока двоичной информационной последовательности. Каждый канал

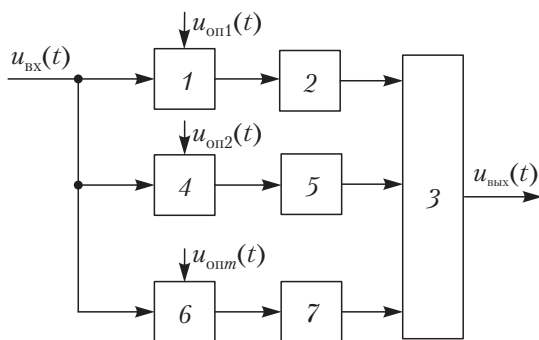


Рис. 3.75. Когерентный детектор ШС с модуляцией по форме:
1, 4, 6 — умножители; 2, 5, 7 — интеграторы; 3 — преобразователь номера канала в двоичный код

содержит коррелятор, в состав которого входит умножитель и интегратор.

На вход когерентного детектора и на сигнальные входы корреляторов поступает ШС, модулированный по форме. На опорные входы корреляторов поступают немодулированные ШС $u(t)_{оп1}$, $u(t)_{оп2}$, ..., $u(t)_{опm}$, которые являются кодовыми последовательностями заданного модуляционного кода. На рис. 3.75 генераторы этих кодовых последовательностей не показаны. Выходы корреляторов соединены с входами преобразователя номера каналов в код. На выходе когерентного детектора реализуется принимаемое двоичное слово блока.

Поясним работу синхронного детектора, полагая, что на его входе действует видеосигнал ШС, модулированный по форме (рис. 3.76, а); длина информационных блоков $k = 2$; в качестве кодовых последовательностей выбраны последовательности симплексного кода. Последовательность 1-й строки является исходной последовательностью Баркера длиной 7, последовательности остальных строк — ее циклическими сдвигами (см. табл. 3.3 на с. 155). Шумоподобные сигналы, кодированные последовательностями 1-й и 4-й строк, приведены на рис. 3.76, б, в.

На выходах корреляторов когерентного детектора реализуются значения взаимно корреляционных функций между принимаемым сигналом и опорными сигналами. На входах (сигнальном и опорном) коррелятора 1-го канала действуют совпадающие по форме ШС (рис. 3.76, а, б). В этом случае на его выходе реализуется значение автокорреляционной функции сигнала $E = 7A^2\tau_n$, где A — амплитуда, τ_n — время формирования одного символа кодовой последовательности этого сигнала. На входах (сигнальных, опорных) других корреляторов присутствуют ШС, которые отличаются по форме. Поэтому на их выходах реализуются значения взаимно корреляционных функций, которые равны $-1/(A^2\tau_n)$. Например, на входе 4-го коррелятора действует сигнал, показанный на рис. 3.76, а, а на его опорном входе — сигнал на рис. 3.76, в.

Вычисленные значения корреляционных функций анализируются в преобразователе 3 (см. рис. 3.75). По наибольшему из них определяется номер канала, по которому на выходе детектора формируется переданное по каналу двоичное слово блока. Для рассмотренного варианта приема это слово 00.

Когерентные детекторы АМ ШС и ФМ ШС являются одно-канальными. Структурные схемы этих детекторов содержат последовательно соединенные корреляторы и решающие устройства. На сигнальные входы корреляторов поступают соответственно модулированный по амплитуде ШС, модулированный по фазе (знаку) ШС. На опорные входы поступают немодулированные ШС. Значения корреляционных функций, вычисленные с помощью корреляторов, сравниваются в решающих устройствах с пороговыми уровнями. Уровень порога при приеме АМ ШС равен половине энергии этого сигнала; при приеме ФМ ШС уровень порога равен нулю, если передаваемые по каналу символы равновероятны.

При превышении значениями корреляционных функций заданных порогов на выходах детекторов формируются символ 1 при приеме АМ ШС символ 0 при приеме ФМ ШС. При не превышении значениями корреляционных функций заданных порогов на выходах детекторов формируются символ 0 при приеме АМ ШС и символ 1 при приеме ФМ ШС.

Когерентное детектирование шумоподобных радиосигналов принципиально не отличается от рассмотренного выше детектирования на видеочастоте, но его реализация становится более сложной

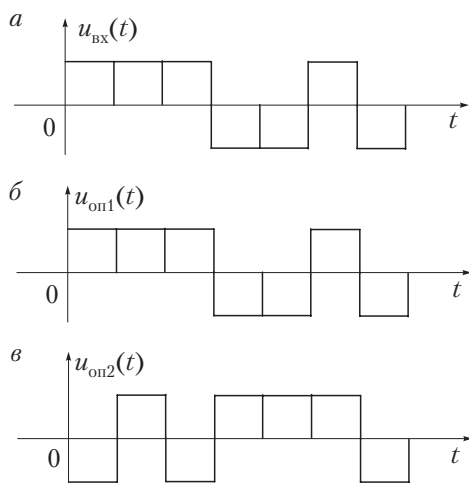


Рис. 3.76. Временные диаграммы, поясняющие детектирование модулированных по форме ШС

из-за необходимости подстройки большего числа параметров опорных ШС под параметры принимаемого сигнала. Такими параметрами являются: тактовая частота, задержка опорных сигналов, несущая частота.

Устройство, с помощью которого обеспечивается совпадение тактовых частот принимаемого и опорного сигналов, называется *устройством тактовой синхронизации*.

Устройства, обеспечивающие совпадение сигналов во времени и по несущей частоте, называются соответственно *устройствами поиска и слежения по времени задержки ШС и по несущей частоте*. Устройства тактовой синхронизации, поиска и слежения входят в состав блока формирования опорного сигнала.



3.11. Цифровая обработка сигналов

3.11.1. Цифровые и дискретные фильтры

Цифровой обработкой сигналов (ЦОС) называется процесс выполнения по заданной программе вычислительных операций (суммирования, умножения и т.д.) над числами, однозначно отображающих эти сигналы.

Преобразования ведутся комплексно, с применением аппаратных и программных средств.

При ЦОС появляется возможность выполнения операций, которые нельзя реализовать традиционными методами. Например, если требуется длительное хранение исходных или промежуточных данных или изменение алгоритмов обработки сигналов путем изменения управляющей программы и т.д.

Примерами использования ЦОС в системах связи являются: обработка звуковых сигналов, включая анализ, распознавание и синтез речи; обработка изображений с целью их улучшения; сжатие информации для ее передачи и хранения; распознавание образов.

Упрощенная структурная схема ЦОС непрерывных сигналов приведена на рис. 3.77. Непрерывный входной сигнал $u_{\text{вх}}(t)$ поступает на АЦП, который преобразует этот сигнал в числа, обычно записываемые в двоичной системе счисления.

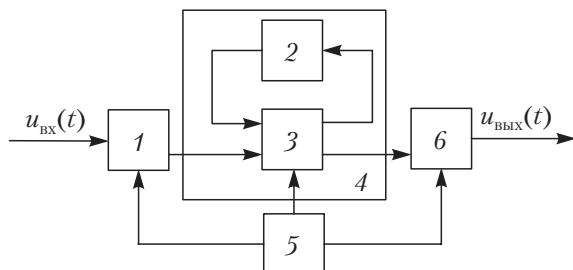


Рис. 3.77. Структурная схема ЦОС:

1 – АЦП; 2 – устройство памяти; 3 – арифметическое устройство;
4 – процессор; 5 – генератор импульсов синхронизации; 6 – ЦАП

Над двоичными числами, хранящимися в устройстве памяти, и числами, поступающими с АЦП, производятся арифметические операции (умножение, сложение, сдвиг во времени) в соответствии с управляющей программой, которая также хранится в устройстве памяти.

В процессе вычислений между арифметическим устройством и устройством памяти происходит обмен данными. В соответствующие моменты времени, которые определяются генератором импульсов синхронизации, цифровой процессор выдает на выход вычисленную последовательность двоичных чисел.

При необходимости эта последовательность преобразуется в непрерывный сигнал с помощью ЦАП.

Цифровой сигнал на выходе АЦП является последовательностью двоичных чисел, выдаваемых через равные интервалы времени. Эти числа соответствуют коэффициентам обобщенного ряда Фурье (2.2), которые, в свою очередь, определяются входным непрерывным сигналом и выбранным набором базисных функций (базисом).

В случае когда в качестве базисных функций используются функции вида $(\sin x)/x$, а спектр непрерывной функции ограничен верхней граничной частотой $F_{\text{в}}$, коэффициенты ряда (2.2) определяются отсчетными значениями непрерывной функции.

Кроме *цифровых фильтров*, обрабатывающих по заданным программам чисто цифровые сигналы, существуют и *дискретные фильтры*, на входы которых подаются неквантованные значения сигналов.

Их преобразование может производиться по тем же формулам, что и для цифровых сигналов (см. п. 3.11.6).

3.11.2. Влияние дискретизации и квантования на качество передаваемой информации

Из теоремы Котельникова следует, что вся информация о сигнале содержится в его отсчетах, которые реализуются на выходе дискретизатора.

Возможными вариантами устройств дискретизации могут быть управляемый ключ, схема которого приведена на рис. 2.12, а также устройство умножения двух сигналов.

Структурная схема на рис. 2.12 содержит ключ с двумя входами, управляемый весьма короткими видеоимпульсами. На сигнальный вход ключа поступает преобразуемый аналоговый сигнал $u(t)$, а на управляющий вход — короткие импульсы. Ключ замкнут, если на управляющем входе присутствует импульс, и разомкнут, если импульс отсутствует. Поэтому с поступлением импульсов на управляющий вход ключа на его выходе появляются значения аналогового сигнала $u(t)$ в течение времени пока ключ замкнут.

Сигнал на выходе ключа (линейной параметрической цепи) определяется выражением

$$u(t)\Phi(t) = u(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(t - k\Delta), \quad (3.78)$$

где $\Phi(t)$ — коэффициент передачи ключа; $v(t)$ — видеоимпульс с единичной амплитудой и длительностью, равной длительности управляющих импульсов; Δ — интервал дискретизации.

Выражение (3.78) определяет амплитудно-модулированный сигнал первого рода (АИМ-1). Спектральная плотность этого сигнала (рис. 3.78, а) определяется сверткой спектральных плотностей входного сигнала и коэффициента передачи ключа:

$$S_{\text{АИМ-1}}(j\omega) = \frac{\tau_{\text{и}}}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\omega_1\tau_{\text{и}}/2)}{k\omega_1\tau_{\text{и}}/2} S[j(\omega - k\omega_1)], \quad (3.79)$$

где $S(j\omega)$ — спектральная плотность входного сигнала; $\tau_{\text{и}}$ — длительность управляющих импульсов; $\omega_1 = 2\pi/\Delta$.

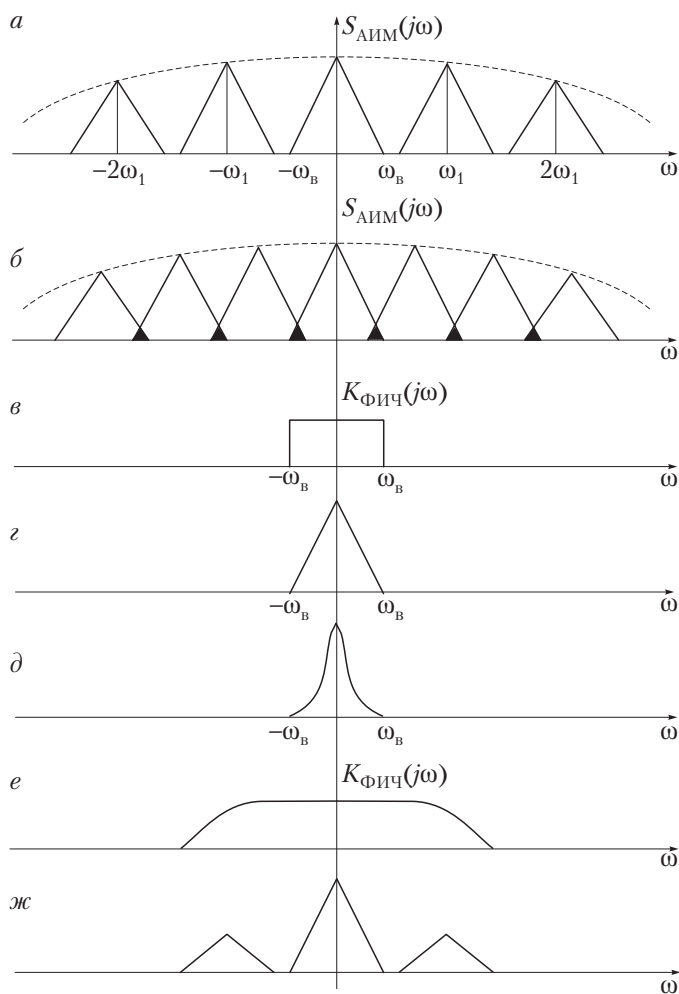


Рис. 3.78. Спектральные характеристики модулированных последовательностей:

а — АИМ-1, интервал дискретизации в соответствии с теоремой Котельникова;
б — АИМ-1, большой интервал дискретизации; *в* — коэффициент передачи идеального ФНЧ; *г* — спектральная плотность на выходе идеального ФНЧ при АИМ-1; *д* — спектральная плотность на выходе идеального ФНЧ при АИМ-2; *е* — коэффициент передачи неидеального ФНЧ; *ж* — спектральная плотность на выходе неидеального ФНЧ

Ее значения около нулевой частоты (рис. 3.78, з) определяют сигнал $u_1^*(t)$, который с точностью до постоянной величины совпадает с преобразуемым сигналом:

$$cu(t) = u_1^*(t) = \frac{\tau_n}{\Delta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (3.80)$$

где $c = \tau_n/\Delta$.

Последняя формула, так же как и ряд (2.53), определяет алгоритм передачи: отсчетные значения следует передавать по каналу связи и затем фильтровать их при помощи ФНЧ (рис. 3.78, в). Однако передача широкополосных отсчетов на большие расстояния экономически нецелесообразна.

Задача решается с помощью АЦП и ЦАП, включенных в состав приемника. В этом случае преобразования отсчетов в АЦП (квантование и кодирование) приводят к изменению вида модуляции восстановленных в ЦАП коротких видеоимпульсов, амплитуды которых соответствуют не отчетным значениям передаваемого сигнала $u(t)$, а их ближайшим уровням квантования. Восстановленные в ЦАП видеоимпульсы определяют амплитудный сигнал второго рода (АИМ-2).

Линейная фильтрация с помощью ФНЧ этих модулированных по амплитуде импульсов определяет оценку передаваемого по каналу непрерывного аналогового сигнала $u_2^*(t)$. Для нахождения данной оценки вычислим спектральную плотность АИМ-2. С этой целью исследуем спектральные характеристики на выходе устройства дискретизации, выполненного на умножителе. На его сигнальный вход поступает сигнал $u(t)$, а на управляющий вход — сумма дельта-импульсов. Эта сумма называется *дискретизирующей последовательностью*.

Произведение произвольной функции $u(t)$ и дельта-функции в момент времени $t = n\Delta$ равно произведению отсчетного значения функции $u(n\Delta)$ и дельта-функции. Поэтому произведение произвольной функции $u(t)$ и дискретизирующей последовательности равно сумме произведений отсчетных значений функции $u(t)$ и дельта-функций:

$$u(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta) \delta(t - n\Delta). \quad (3.81)$$

Вычислим спектральную плотность функций, определяющих левую и правую части равенства.

Запишем дискретизирующую функцию в виде ряда Фурье в комплексной форме:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\Delta} e^{jk\omega_1 t} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_1 t},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha(jk\omega_1) &= \frac{2}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta) e^{-jk\omega_1 t} dt = \\ &= \frac{2}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \delta(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{2}{\Delta}, \quad \omega_1 \Delta = 2\pi.\end{aligned}$$

Спектральная плотность левой части равенства (3.81) равна

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} u(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta) e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_1 t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j(\omega - k\omega_1)t} dt = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S[j(\omega - k\omega_1)],\end{aligned}$$

где $S[j\omega]$ — спектральная плотность функции (аналогового сигнала) $u(t)$.

Спектральная плотность правой части равенства (3.81) равна:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta) \delta(t - n\Delta) e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta) e^{-j\omega n\Delta}.$$

Приравнявая выражения для спектральных плотностей, получим уравнение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta) e^{-j\omega n\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S[j(\omega - k\omega_1)]. \quad (3.82)$$

Это уравнение используем при вычислении спектральной плотности АИМ-2 последовательности импульсов. Вычислим спектральную плотность n -го АИМ-2 импульса:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u(n\Delta)v(t - n\Delta)e^{-j\omega t}dt &= u(n\Delta) \int_{-\infty}^{\infty} v(t - n\Delta)e^{-j\omega t}dt = \\ &= u(n\Delta)e^{-j\omega n\Delta} \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} v(x)e^{-j\omega x}dx = u(n\Delta)S_0(j\omega)e^{-j\omega n\Delta}, \end{aligned}$$

где $S_0(j\omega)$ — спектральная плотность импульса $v(t)$ (с амплитудой, равной 1 и длительностью τ_n), расположенного симметрично относительно вертикальной оси.

Спектральная плотность суммы импульсов равна сумме спектральных плотностей слагаемых:

$$S_{\text{АИМ-2}}(j\omega) = S_0(j\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta)e^{-j\omega n\Delta}.$$

Принимая во внимание равенство (3.82) и вычисляя спектральную плотность импульса $v(t)$, получим выражение для спектральной плотности сигнала АИМ-2:

$$S_{\text{АИМ-2}}(j\omega) = \frac{\tau_n}{\Delta} \frac{\sin(\omega\tau_n/2)}{\omega\tau_n/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S[j(\omega - k\omega_1)], \quad (3.83)$$

где $\omega_1 = 2\pi/\Delta$.

Спектральная плотность сигнала АИМ-2 определяется периодически повторяющейся спектральной плотностью сигнала на входе устройства дискретизации, умноженной на функцию $(\sin x)/x$. Период равен $\omega_1 = 2\pi/\Delta$ и определяется интервалом дискретизации. Чем больше этот интервал, тем меньше значение периода и тем большее число повторений спектральной плотности входного сигнала будет в заданном частотном диапазоне. При таком выборе интервала дискретизации (рис. 3.78, б) спектральные плотности перекрываются. В этом случае при восстановлении исходного непрерывного колебания с помощью ФНЧ возникнут искажения. Чтобы избежать их, нужно интервал дискретизации выбрать так, чтобы выполнялось равенство $2\omega_b = \omega_1$. Из равенства следует зна-

чение интервала дискретизации $\Delta = 1/(2F_B)$, которое определяется теоремой Котельникова.

Рассмотрим влияние сомножителя $(\sin x)/x$, входящего в формулу (3.83), на качество восстановленного на выходе ЦАП сигнала $u_2^*(t)$. С этой целью запишем выражение для спектральной плотности сигнала на выходе ЦАП, используя формулу (3.83):

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = S_{\text{АИМ-2}}(j\omega) = \frac{\tau_{\text{и}}}{\Delta} \frac{\sin(\omega\tau_{\text{и}}/2)}{\omega\tau_{\text{и}}/2} S(j\omega).$$

По этой формуле найдем требуемый сигнал:

$$u_2^*(t) = \frac{\tau_{\text{и}}}{\Delta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega\tau_{\text{и}}/2)}{\omega\tau_{\text{и}}/2} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Сравнивая полученное выражение с выражением (3.80), находим под знаком интеграла сомножитель $(\sin x)/x$, который изменяет спектральную плотность на выходе ФНЧ (рис. 3.78, *д*) и определяет величину погрешности воспроизведения передаваемого сигнала

$$\Delta u = u_2^*(t) - u_1^*(t).$$

Эта погрешность тем больше, чем больше длительность $\tau_{\text{и}}$ восстанавливаемых в ЦАП видеоимпульсов. При стремлении данной длительности к нулю функция $(\sin x)/x$ стремится к единице, а восстановленный сигнал с точностью до постоянной величины — к передаваемому сигналу.

Искажения возникают и за счет АЧХ ФНЧ. Реальные АЧХ, в отличие от идеальной, имеют плавные переходы из зоны «прозрачности» в зону «непрозрачности» фильтра (см. рис. 3.78, *е*). Использование такого фильтра приводит к тому, что в полосу пропускания попадают соседние спектральные составляющие, искажающие восстановленный сигнал (см. рис. 3.78, *ж*).

Из приведенного анализа следуют следующие рекомендации по уменьшению погрешностей при дискретизации и квантовании аналогового сигнала:

□ интервал дискретизации должен выбираться так, чтобы выполнялось условие $\Delta = 1/(2F_B)$. Если интервал дискретизации выбран меньше этого значения, то отсутствует наложение спектральных составляющих и восстановление сигнала происходит без искажений (см. рис. 3.78). Если интервал дискретизации выбран больше

величины Δ , то при восстановлении сигнала возникают искажения из-за указанного выше наложения. На рис. 3.78, б перекрывающиеся спектральные составляющие заштрихованы;

□ длительность восстановленных импульсов при АИМ-2 должна быть достаточно малой (для того чтобы исключить влияние изменения функции $(\sin x)/x$ вблизи нулевой частоты);

□ ФНЧ должен иметь такой коэффициент передачи, при котором влияние соседних спектральных составляющих на восстановленный сигнал исключается.

3.11.3. Дискретное преобразование Фурье

При анализе дискретных систем связи наряду с дискретным рядом Фурье используют также дискретное преобразование Фурье. Последнее является аналогом ряда Фурье в комплексной форме [см. формулу (2.6)]. Этот ряд определяет периодическую функцию, для которой выполняется равенство

$$\begin{aligned} u(t + T) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(jk\omega_1) e^{jk\omega_1(t+T)} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} e^{jk\omega_1 T} = u(t), \end{aligned}$$

так как $e^{jk\omega_1 T} = 1$.

Найдем выборочные значения сигнала $u(t)$: $u(0)$, $u(1)$, ..., $u(N-1)$, разделив период T сигнала на части, равные интервалу дискретизации Δ . Заменим в преобразовании Фурье (2.7) текущее время на дискретное так, что $t = n\Delta$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, а период $T = N\Delta$, где N — число выборочных значений в интервале T . Приращение dt изменим на интервал дискретизации Δ . В связи с переходом к дискретным значениям интеграл заменим суммой. Введем обозначение $C_k = (1/2)\alpha(jk\omega_1)$. С учетом замен и обозначений запишем выражение для спектрального коэффициента в виде

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{2} \alpha(jk\omega_1) = \frac{1}{N\Delta} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-j \frac{2\pi}{N\Delta} kn\Delta} \Delta = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Приведенная дискретная функция имеет период, равный N :

$$C_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+N)n} = C_k,$$

так как $e^{-j\frac{2\pi}{N}Nn} = 1$.

Используя аналогичные замены, а также то, что функция C_k имеет период, равный N , получим выражение для выборочных значений функции:

$$u(n) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad (3.85)$$

где C_k — коэффициенты этого ряда.

Формулы (3.84), (3.85) называются *прямым* и *обратным* дискретными преобразованиями Фурье (ДПФ) и являются важными математическими моделями дискретных сигналов.

Отметим основные свойства ДПФ.

1. ДПФ есть линейное преобразование, т.е. сумме сигналов отвечает сумма ДПФ.

2. Число различных спектральных коэффициентов равно числу N отсчетов за период. $C_N = C_0$ при $k = N$.

3. Коэффициент C_0 является средним значением всех выборочных значений:

$$C_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n). \quad (3.86)$$

4. Если N — четное и $k = N/2$, то

$$C_{\frac{N}{2}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N}{2} n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) (-1)^n.$$

5. Коэффициент C_{N-k} определяется по формуле

$$\begin{aligned} C_{N-k} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-k)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nN} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = C_k^* \end{aligned} \quad (3.87)$$

так как $e^{-j2\pi n} = 1$.

Пример 3.10. Дискретный сигнал задан шестью равноотстоящими выборочными значениями:

$$\{u(n)\} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}.$$

Найти коэффициенты C_0, C_1 ДПФ этого сигнала.

Решение. Используя формулу (3.84), вычислим:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{6}[u(0) + u(1) + u(2) + u(3) + u(4) + u(5)] = 3/6, \\ C_1 &= \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 u(n)e^{-j2\pi n/6} = \frac{1}{6}[u(0) + u(1)e^{-j2\pi/6} + u(2)e^{-j2\pi \cdot 2/6}] = \\ &= \frac{1}{6}[1 + e^{-j\pi/3} + e^{-j2\pi/3}]. \end{aligned}$$

Как видно из формул (3.84), (3.85), для вычислений требуется выполнить N^2 операций с комплексными числами.

Если N велико (порядка тысячи и более), то вычисления в реальном масштабе времени становятся затруднительными из-за ограниченного быстродействия вычислительных средств. Решить возникшую проблему можно, используя алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ), который позволяет существенно сократить число вычислительных операций.

3.11.4. Быстрое преобразование Фурье

Существует несколько различных алгоритмов БПФ. Наиболее простым из них является алгоритм, в котором используемое число выборочных значений N выражается степенью числа 2. Тогда входная последовательность выборочных значений может быть разбита на две. Первая содержит отсчеты с четными, а вторая — с нечетными номерами. Эта операция называется *прореживанием по времени*.

Запишем некоторый коэффициент ДПФ, используя четные и нечетные номера входной последовательности:

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[u(2n)e^{-j\frac{2\pi}{N}2kn} + u(2n+1)e^{-j\frac{2\pi}{N}k(2n+1)} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \left[\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} u(2n) e^{-j \frac{2\pi kn}{N/2}} + e^{-j \frac{2\pi k}{N}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} u(2n+1) e^{-j \frac{2\pi kn}{N/2}} \right] = \\
&= C_{\text{кчт}} + e^{-j \frac{2\pi k}{N}} C_{\text{кнч}}, \tag{3.88}
\end{aligned}$$

где $u(2n)$, $u(2n+1)$ — значения входной последовательности с четными и нечетными номерами соответственно,

$$\begin{aligned}
C_{\text{кчт}} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} u(2n) e^{-j \frac{2\pi kn}{N/2}}, \\
C_{\text{кнч}} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} u(2n+1) e^{-j \frac{2\pi kn}{N/2}}. \tag{3.89}
\end{aligned}$$

Коэффициенты $C_{\text{кчт}}$, $C_{\text{кнч}}$ в 2 раза меньше коэффициентов ДПФ, а их период равен $N/2$, т.е. $C_{\text{кчт}} = C_{k+N/2\text{чт}}$, $C_{\text{кнч}} = C_{k+N/2\text{нч}}$.

Множитель $e^{-j2\pi k/N}$, входящий в формулу (3.88) при всех $k \geq N/2$, запишем в виде

$$e^{-j2\pi[(N/2)+k]/N} = e^{-j(2\pi/N)N/2} e^{-j2\pi k/N} = -e^{-j2\pi k/N}.$$

Следовательно, коэффициенты ДПФ при всех $k \geq N/2$

$$C_{\frac{N}{2}+k} = C_{\text{кчт}} - e^{-j \frac{2\pi k}{N}} C_{\text{кнч}}. \tag{3.90}$$

Вычисления ведут по итерационному принципу по формулам (3.88) и (3.90). Последовательности из четных и нечетных номеров далее вновь разбивают на две части и т.д.

3.11.5. Дискретное преобразование Уолша

Формула дискретного преобразования следует из формулы усеченного ряда Уолша (см. § 2.8), если непрерывные функции Уолша заменить дискретными, а текущее непрерывное время — дискретным временем:

$$\theta = \frac{t}{T} = \frac{i\Delta}{N\Delta} = \frac{i}{N}.$$

Дискретный ряд

$$u(i) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \text{Wal}(n, i/N),$$

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} u(i) \text{Wal}(n, i/N),$$

где i — значение дискретного времени; $u(i)$ — выборочное значение сигнала $u(t)$ в i -й момент времени; $\text{Wal}(n, i/N)$ — i -е значение функции Уолша с номером n .

Дискретные функции Уолша получают из непрерывных функций Уолша дискретизацией последних.

Количество выборочных значений равно 2^m , $m = 1, 2, 3, \dots$, а интервал дискретизации равен $\Delta = 1/2^m$.

Значения дискретных функций записывают в виде квадратной матрицы. Каждая строка этой матрицы содержит выборку функции Уолша, номер которой совпадает с номером строки. Например, матрица дискретных функций Уолша для $m = 3$:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}$$

Матрица получена дискретизацией соответствующих непрерывных функций Уолша с интервалом дискретизации, который равен $1/8$.

3.11.6. Линейная цифровая фильтрация

Линейная цифровая фильтрация заимствует основные положения теории линейных систем.

Линейный цифровой фильтр (ЦФ) преобразует выборку из отсчетов входного сигнала $\{u(n)\}$ в выборку из отсчетов $\{v(n)\}$ выходного сигнала:

$$u(0), u(1), \dots, u(n), \dots \rightarrow v(0), v(1), \dots, v(n);$$

$$v(m) = \sum_{n=0}^m u(n)h(m-n), \quad (3.91)$$

где $\{h(n)\}$ — выборочные значения импульсной характеристики, которая является реакцией фильтра на единичный импульс $(1, 0, 0, \dots)$.

Смысл формулы (3.91) прост и нагляден: значение $v(m)$ выходного сигнала равно взвешенной сумме $u(m)$ и всех предыдущих значений входного сигнала, причем роль весовых коэффициентов выполняют выборочные значения импульсной характеристики $h(n)$ цифрового фильтра, т.е. этот фильтр обладает памятью по отношению к прошлым воздействиям.

Для физически реализуемых систем реакция ЦФ равна нулю до подачи единичного импульса, поэтому коэффициенты $h(-1)$, $h(-2)$, ... равны нулю и суммирование в формуле (3.91) можно распространить на все положительные значения индекса n :

$$v(m) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)h(m-n). \quad (3.92)$$

Задача преобразования выборки может быть сформулирована и как задача преобразования спектральной плотности этой выборки.

Найдем выражение спектральной плотности выборки. Для этого разделим левую и правую части выражения (2.14) спектральной плотности сигнала $S(j\omega)$ на интервал дискретизации $\Delta = \tau_n/N$, где τ_n — длительность сигнала $u(t)$, N — число выборочных значений. Текущее время t заменим на дискретное $n\Delta$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Знак интеграла заменим знаком суммы, величину dt заменим на интервал Δ . В результате получим

$$\frac{S(j\omega)}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \int_0^{\tau_n} u(t)e^{-j\omega t} dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} u(n\Delta)e^{-j\omega n\Delta}. \quad (3.93)$$

В полученном выражении аргумент $n\Delta$ выборочного значения функции $u(n\Delta)$ заменен на величину n , так как для индикации дис-

кретного момента времени при известном значении Δ достаточно указать значение n .

Обратное преобразование Фурье спектральной плотности выборки равно

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(j\omega)}{\Delta} e^{j\omega t} d\omega &= \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n\Delta} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \delta(t - n\Delta). \end{aligned} \quad (3.94)$$

В формуле (3.93) используем подстановку

$$z = e^{j\omega\Delta}. \quad (3.95)$$

В результате получим z -преобразование выборки

$$\{u(n)\} = \{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\}$$

на входе ЦФ:

$$u(z) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) z^{-n}. \quad (3.96)$$

По числовой последовательности импульсной характеристики ЦФ

$$\{h(n)\} = \{h(0), h(1), \dots, h(M-1)\}$$

найдем *системную функцию* ЦФ:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) z^{-n}. \quad (3.97)$$

Зная z -преобразование выборки, действующей на входе ЦФ, и системную функцию этого фильтра, можно найти z -преобразование выборки на его выходе:

$$v(z) = u(z)H(z). \quad (3.98)$$

Это преобразование можно также найти, если известна выходная числовая последовательность

$$\begin{aligned} \{v(n)\} &= \{v(0), v(1), \dots, v(l-1)\}, \\ v(z) &= \sum_{n=0}^{l-1} v(n) z^{-n}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Так как функции $u(z)$, $v(z)$ являются многочленами, то системную функцию можно найти делением многочлена на многочлен:

$$H(z) = \frac{v(z)}{u(z)}. \quad (3.100)$$

По этой функции находится коэффициент передачи ЦФ заменной переменной z на $e^{j\omega\Delta}$.

Пример 3.11. Импульсная характеристика ЦФ определяется последовательностью, содержащей два выборочных значения: $\{h(n)\} = (1, -1, 0, \dots)$.

Вычислить коэффициент передачи $K(j\omega)$ ЦФ по системной функции.

Решение. Системная функция

$$H(z) = 1 - z^{-1}.$$

Подставляя в полученную формулу $z = e^{j\omega\Delta}$, получим

$$K(j\omega) = 1 - e^{-j\omega\Delta} = 1 - \cos \omega\Delta + j \sin \omega\Delta.$$

Дискретное преобразование Лапласа определяется выражением

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n\Delta) e^{-pn\Delta}, \quad (3.101)$$

где $u(n\Delta)$ — отсчетное значение сигнала; Δ — интервал дискретизации.

Формула (3.101) получается в результате вычисления *преобразования Лапласа*

$$F(p) = \int_0^{\infty} \varphi_{\Delta}(t) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) \int_0^{\infty} \delta(t - n\Delta) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) e^{-pn\Delta},$$

где

$$\varphi_{\Delta}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) \delta(t - n\Delta).$$

Интеграл вычислен с применением фильтрующего свойства дельта-функции. Если произвести замену $e^{p\Delta} = z$, то формула (3.101) переходит в формулу (3.96).

Следовательно, дискретное преобразование Лапласа является аналогом z -преобразования.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под математической моделью блока или системы?
2. Каким условиям удовлетворяют операторы: линейной, параметрической и нелинейной систем?
3. Дайте определение линейной, параметрической и нелинейной систем.
4. Как формулируется и решается задача преобразования дискретного спектра линейной, параметрической и нелинейной системой?
5. Как формулируется и решается задача преобразования спектральной плотности сигнала линейной, параметрической и нелинейной системой?
6. Что такое преобразование частоты сигнала?
7. Какие виды амплитудной непрерывной модуляции известны?
8. Что такое индекс амплитудной модуляции?
9. Чем отличаются спектры АМ-БУН, АМ-ПН, АМ-ПН-ОБП сигналов?
10. В чем сходство и различие между аналоговыми ФМ и ЧМ сигналами?
11. Как связаны между собой девиация частоты и индекс модуляции?
12. В чем сходство и различие спектров аналогового ЧМ сигнала с малым индексом модуляции и аналогового АМ сигнала?
13. Какие методы формирования ЧМ сигнала известны?
14. Перечислите виды модуляций импульсного переносчика. В чем сходство и различие спектров этих сигналов?
15. Какие виды дискретной модуляции непрерывного гармонического сигнала известны?
16. Какие преимущества имеет многократная относительная фазовая модуляция по сравнению с многократной фазовой модуляцией?
17. В чем сходство и различие между сигналом многократной ФМ и КАМ сигналом?
18. Укажите виды модуляций шумоподобного сигнала.
19. Какие методы детектирования непрерывных АМ сигналов известны?
20. В чем сходство и различие некогерентного и когерентного детектирования?
21. В каких системах связи используется некогерентный детектор?
22. Поясните работу некогерентного детектора.
23. Поясните работу когерентного детектора.
24. Какие сигналы детектируются когерентными детекторами?
25. Дайте определение цифровой обработки сигналов. Приведите примеры использования.
26. В чем сходство и различие АИМ-1 и АИМ-2?
27. Приведите выражения для прямого и обратного дискретного преобразований Фурье.

28. Приведите выражения, определяющие спектральные коэффициенты БПФ.
29. Приведите выражение для z -преобразования выборки сигнала. Сравните его с выражением для спектральной плотности выборки. Какая подстановка преобразует спектральную плотность выборки в z -преобразование?



СЛУЧАЙНЫЕ СИГНАЛЫ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

4.1. Математические модели непрерывных случайных процессов

Случайной называется такая функция, которая может принять тот или иной конкретный вид, но неизвестно заранее, какой именно. Этот вид называется *реализацией*. Случайные функции зависят от времени и других параметров. Пример реализаций случайных функций, зависящих от времени, приведен на рис. 4.1. Совокупность реализаций называется *ансамблем*.

Проведем сечение ансамбля при некотором значении времени (см. рис. 4.1). В результате получим несколько случайных выборочных значений. Их число равно числу реализаций.

Для математического описания *случайного процесса*, как правило, одного сечения недостаточно. Поэтому проводят несколько сечений в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_n$. Временной интервал между сечениями удобно выбрать одинаковым и равным $1/(2F_v)$, где F_v — верхняя граничная частота спектра случайного процесса.

Случайная функция $\xi(t)$ считается заданной, если для последовательных моментов времени $t_1, t_2, \dots, t_n$ и заранее выбранных значений неслучайных аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$ можно вычислить вероятность того, что случайные значения $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$ не превосходят соответственно значений $x_1, x_2, \dots, x_n$. Эта вероятность является *n-мерной интегральной функцией распределения*:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ = P[\xi(t_1) \leq x_1; \xi(t_2) \leq x_2; \dots; \xi(t_n) \leq x_n]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

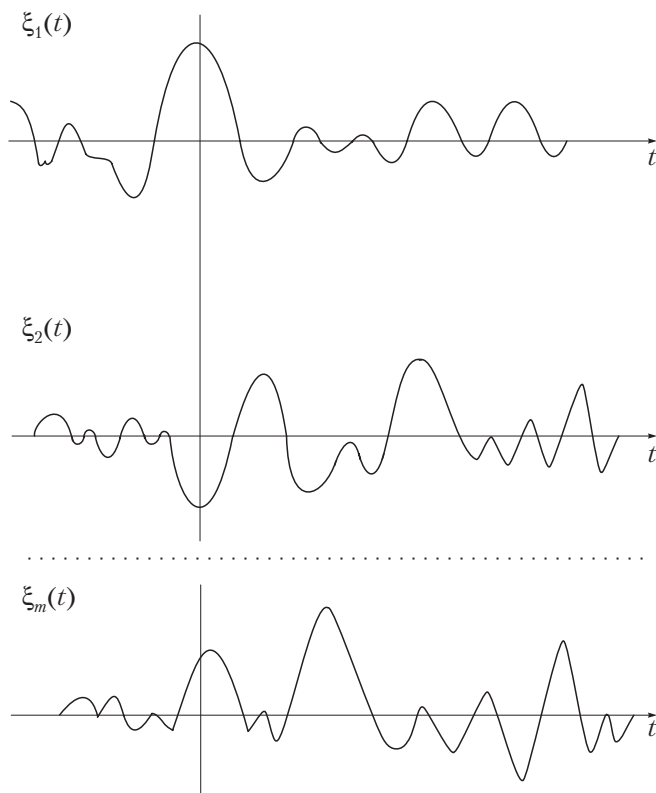


Рис. 4.1. Ансамбль реализаций случайного процесса и сечение

Вычисление функции (4.1) предполагает переход от непрерывных во времени реализаций к их выборочным значениям, взятым в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_n$. Очевидно, что чем большее число реализаций и сечений задано, тем более точно в статистическом смысле описывается случайный процесс.

Случайная величина определяется одномерной функцией

$$F(x, t) = P[\xi(t) \leq x],$$

где $P[\xi(t) \leq x]$ — вероятность того, что случайная величина $\xi(t)$ не превосходит заранее выбранное значение x .

Одномерная функция является самой простой в ряду других функций распределения и наиболее наглядной.

Пример 4.1. Построить график одномерной функции распределения по следующим исходным данным. Случайная величина измерялась 42 раза. Из этого числа измерений значение, равное -5 , встретилося один раз, равное -4 , встретилося дважды и т.д. (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Исходные данные											
Значение случайной величины ξ	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Число случаев этой величины	1	2	3	4	5	12	5	4	3	2	1

Решение. Для построения графика рассчитаем частоты появления следующих событий: случайная величина не превосходит -5 ; случайная величина не превосходит -4 и т.д., полагая, что значения неслучайного аргумента, соответственно, равны $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Событие, заключающееся в том, что случайная величина не превосходит -5 , определяется частотой, равной $1/42$; событие, заключающееся в том, что случайная величина не превосходит -4 , определяется частотой, равной $3/42$, и т.д.

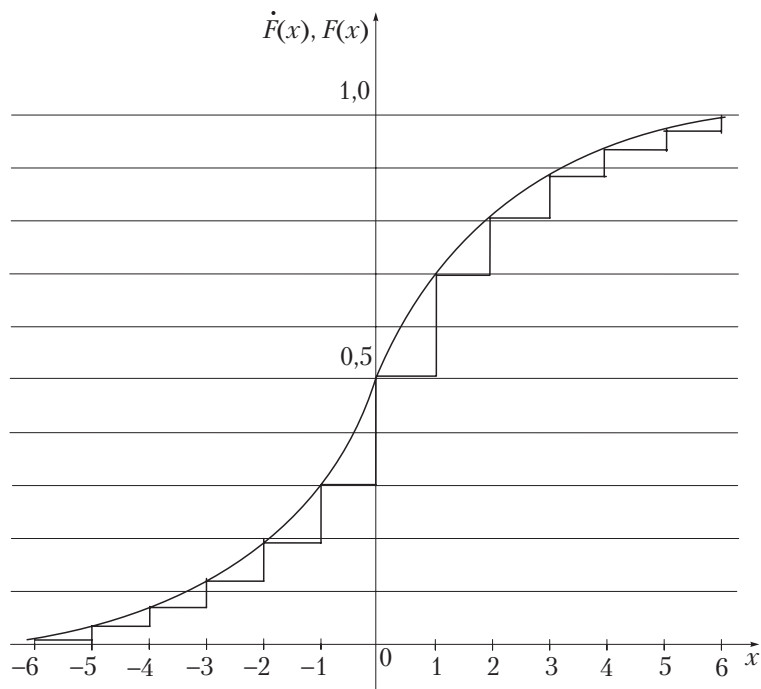
График функции распределения $F^*(x)$, построенный по исходным данным, приведен на рис. 4.2. При стремлении числа измерений к бесконечности, а интервала дискретизации случайных реализаций величины — к нулю ступенчатая функция $F^*(x)$ стремится к непрерывной $F(x)$. Последняя функция имеет значения в промежутке $[0; 1]$ и не содержит скачков и разрывов.

Если существуют частные производные функции распределения по всем переменным, то можно найти n -мерную *плотность распределения вероятности*:

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \partial^n F \frac{(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}. \quad (4.2)$$

Зная эту плотность, всегда можно получить плотность для меньшего числа переменных ($m < n$) интегрированием исходной плотности по остальным ($n - m$) переменным. Например, двумерная плотность находится по n -мерной интегрированием по $n - 2$ переменным:

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2; t_1, t_2) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_3 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Рис. 4.2. Графики зависимостей $F^*(x)$ и $F(x)$

Одномерная плотность $w(x, t) = dF(x, t)/dx$. Следовательно,

$$\int_a^b w(x, t) dx = \int_a^b dF(x, t) = F(b, t) - F(a, t),$$

где a, b — заданные значения случайной величины.

Когда разность $b - a$ выбрана достаточно малой, последнее интегральное соотношение определяет важную характеристику случайной величины, которая называется *вероятностью реализации случайной величины*.

Если случайная величина лежит в интервале $(-\infty, \infty)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x, t) dx = F(\infty, t) - F(-\infty, t) = 1.$$

Из последнего соотношения следует, что площадь под кривой распределения $w(x, t)$ равна 1.

Аналогичным свойством обладают и другие плотности: двумерные, трехмерные и т.д.

Важным понятием является *условная плотность распределения вероятности*.

Примером условной плотности, выраженной через двумерную и одномерную плотности вероятности, является

$$w(x_1, t_1/x_2, t_2) = \frac{w(x_1, x_2; t_1, t_2)}{w(x_2, t_2)}. \quad (4.4)$$

Формула (4.4) может быть обобщена на большее число переменных и означает, что знание о случайной величине $\xi(t_2)$ дает информацию и о величине $\xi(t_1)$. Из формулы (4.4) также следует, что двумерная плотность распределения вероятности

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2; t_1, t_2) &= w(x_2, t_2)w(x_1, t_1/x_2, t_2) = \\ &= w(x_1, t_1)w(x_2, t_2/x_1, t_1). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Если выборочные значения случайных реализаций независимы, то n -мерная плотность распределения вероятности равна произведению одномерных плотностей:

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= \\ &= w(x_1, t_1)w(x_2, t_2) \cdots w(x_n, t_n). \end{aligned} \quad (4.6)$$

В этом случае исчерпывающей характеристикой случайной функции является ее *одномерная плотность*.

В ряде задач достаточно ограничиться такими числовыми характеристиками, как моменты распределения.

По одномерной плотности распределения вероятности можно вычислить начальные моменты распределения, в том числе моменты 1-го и 2-го порядка.

Момент 1-го порядка является средним значением случайных величин, полученных сечением ансамбля реализаций в некоторый момент времени:

$$M\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x, t)dx = a(t). \quad (4.7)$$

Момент 2-го порядка равен среднему от квадратов значений этих случайных величин:

$$M\{\xi^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \omega(x, t) dx. \quad (4.8)$$

Разность между случайным процессом и его математическим ожиданием называется *центрированным процессом* и обозначается

$$\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - a(t).$$

Математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины называется *дисперсией*:

$$\begin{aligned} D\{\xi(t)\} &= M\{[\xi(t) - a(t)]^2\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x - a(t)]^2 w(x, t) dx = \sigma^2(t). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Дисперсия является мерой разброса случайной величины около ее среднего значения.

Ряд задач решается с использованием двумерной плотности распределения. Например, *смешанный второй начальный момент* или *функция корреляции* определяется через двумерную плотность следующим интегральным выражением:

$$B(t_1, t_2) = M\{\xi(t_1), \xi(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (4.10)$$

Для центрированного случайного процесса функция корреляции

$$\begin{aligned} B(t_1, t_2) &= M\{\overset{\circ}{\xi}(t_1), \overset{\circ}{\xi}(t_2)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - a(t_1)][x_2 - a(t_2)] w(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Статистическая связь между двумя случайными процессами $\xi(t)$, $\gamma(t)$ в моменты времени t_1 , t_2 определяется *функцией взаимной корреляции*:

$$B_{x,y}(t_1, t_2) = M\{\xi(t_1), \gamma(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy w(x, y; t_1, t_2) dx dy. \quad (4.12)$$

Если случайные величины статистически независимы, то двумерную плотность можно записать в виде произведения одномерных плотностей:

$$w(x, y; t_1, t_2) = w(x, t_1)w(y, t_2).$$

При этом формула (4.12) упрощается:

$$B_{x,y}(t_1, t_2) = M\{\xi(t_1), \gamma(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x w(x, t_1) dx \int_{-\infty}^{\infty} y w(y, t_2) dy. \quad (4.13)$$

Для центрированных случайных процессов функция взаимной корреляции

$$\begin{aligned} M\{\overset{\circ}{\xi}(t_1), \overset{\circ}{\gamma}(t_2)\} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - a(t_1)][y - a(t_2)] w(x, y; t_1, t_2) dx dy. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Для центрированных статистически независимых случайных процессов функция взаимной корреляции

$$\begin{aligned} M\{\overset{\circ}{\xi}(t_1), \overset{\circ}{\gamma}(t_2)\} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} [x - a(t_1)] w(x, t_1) dx \int_{-\infty}^{\infty} [y - a(t_2)] w(y, t_2) dy = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Под *стационарным* процессом понимают такой случайный процесс, n -мерная плотность вероятности которого не меняется при любом сдвиге всей группы точек $t_1, t_2, \dots, t_n$ вдоль оси времени. Это условие записывается в виде

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ = w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau), \end{aligned} \quad (4.16)$$

где τ — временной сдвиг.

Случайные процессы, удовлетворяющие этому условию, называются *стационарными в узком смысле*. Случайный процесс, у которого математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а функция корреляции зависит только от разности $\tau = t_2 - t_1$,

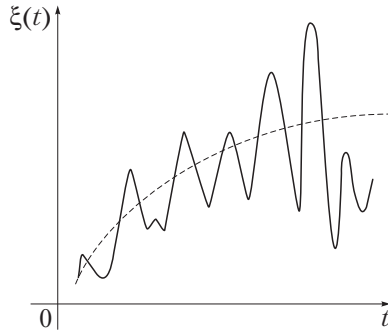


Рис. 4.3. Реализация нестационарного случайного процесса

называется *стационарным в широком смысле*. Случайные процессы, не удовлетворяющие сформулированным условиям, называются *нестационарными*. Реализация нестационарного процесса приведена на рис. 4.3. У этой реализации меняется не только среднее значение, но и дисперсия.

Стационарный процесс называется *эргодическим*, если любая его реализация имеет одни и те же статистические свойства. Поэтому для эргодических процессов любая статистическая характеристика, полученная усреднением по множеству реализаций, может быть получена также усреднением за достаточно большой промежуток времени по одной реализации случайного процесса.

Основные статистические характеристики эргодического случайного процесса

$$M\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x,t)dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t)dt = \overline{\xi(t)}; \quad (4.17)$$

$$M\{\xi^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2w(x,t)dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi^2(t)dt = \overline{\xi^2(t)};$$

$$\begin{aligned} M\{[\xi(t) - a(t)]^2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} [x - a(t)]^2w(x,t)dx = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - a(t)]^2dt = D\{\xi(t)\}; \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}
 B(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) \xi(t + \tau) dt = B(\tau),
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

где τ — разность моментов времени ($\tau = t_2 - t_1$);

$$\begin{aligned}
 B_{x,y}(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy w(x, y; t_1, t_2) dx dy = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) \gamma(t + \tau) dt = B_{xy}(\tau).
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Эргодические процессы чаще других используются в качестве математических моделей сообщений, сигналов и помех. Это объясняется тем, что свойство эргодичности позволяет рассматривать не множество, а всего одну реализацию. Например, для вычисления функции автокорреляции шума на выходе усилителя достаточно подать его на многоканальный коррелометр (рис. 4.4) и из-

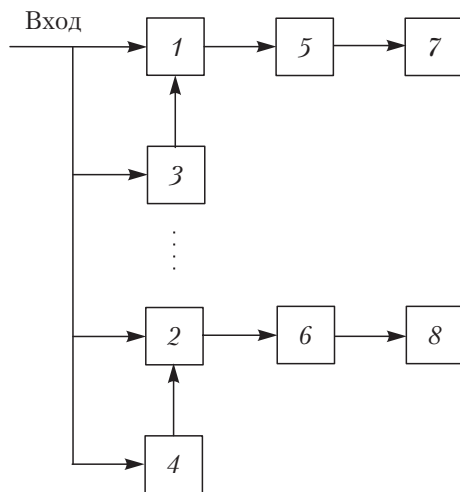


Рис. 4.4. Структурная схема коррелометра:
1, 2 — умножители; 3, 4 — линии задержки; 5, 6 — интеграторы;
7, 8 — вольтметры

мерить напряжения на выходах каналов. Каждый канал содержит умножитель, линию задержки, интегратор и вольтметр. Линии задержки задерживают входную реализацию шума на заданные величины, в умножителях входная реализация умножается на задержанные реализации, а интеграторы интегрируют результаты умножений. Вольтметрами измеряются значения автокорреляционной функции.

4.2. Математические модели дискретных случайных процессов



Случайные процессы включают в себя, кроме рассмотренных выше непрерывных процессов, также и дискретные процессы. Примерами дискретных процессов являются:

- дискретные процессы непрерывного времени (рис. 4.5, а);
- дискретные процессы дискретного времени (рис. 4.5, б).

Математическими моделями этих процессов являются случайные последовательности.

Рассмотрим математическую модель дискретного процесса дискретного времени. Процесс математически задан, если для счетного числа моментов времени t_i , $i = 1, 2, \dots, N$, и счетного числа дискретных значений a_{ri} , $r = -m, -m + 1, \dots, 0, 1, 2, \dots, m$, задана совместная вероятность

$$\begin{aligned} P(\xi_1 = a_{r1}, \xi_2 = a_{r2}, \dots, \xi_N = a_{rN}) = \\ = P(\xi_1 = a_{r1})P(\xi_2 = a_{r2} / \xi_1 = a_{r1}) \dots \\ \dots P(\xi_N = a_{rN} / \xi_{N-1} = a_{rN-1}, \xi_{N-2} = a_{rN-2}, \dots, \xi_1 = a_{r1}), \end{aligned} \quad (4.21)$$

где a_{ri} — значение дискретного процесса в дискретный момент времени t_i ; $P(\xi_N = a_{rN} / \xi_{N-1} = a_{rN-1}, \xi_{N-2} = a_{rN-2}, \dots, \xi_1 = a_{r1})$ — вероятность появления в момент времени t_N дискретного значения a_{rN} при условии, что в предыдущие моменты времени $t_{N-1}, t_{N-2}, \dots, t_1$ дискретные значения были равны соответственно $a_{rN-1}, a_{rN-2}, \dots, a_{r1}$.

Случайный процесс, определяемый вероятностью (4.21), иногда называют дискретным процессом с памятью. У этого процесса в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_n$ между его значениями имеется статистическая связь.

Дискретный процесс называется *простым марковским процессом*, если условная вероятность зависит только от соседних моментов времени:

$$\begin{aligned} P(\xi_k = a_{rk} / \xi_{k-1} = a_{rk-1}, \xi_{k-2} = a_{rk-2}, \dots, \xi_1 = a_{r1}) = \\ = P(\xi_k = a_{rk} / \xi_{k-1} = a_{rk-1}). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Для простого марковского процесса совместная вероятность определяется произведением безусловной вероятности реализации значения процесса в момент времени t_1 на условные вероятности, которые называются вероятностями перехода:

$$\begin{aligned} P(\xi_1 = a_{r1}, \xi_2 = a_{r2}, \dots, \xi_N = a_{rN}) = \\ = P(\xi_1 = a_{r1})P(\xi_2 = a_{r2} / \xi_1 = a_{r1}) \cdots P(\xi_N = a_{rN} / \xi_{N-1} = a_{rN-1}). \end{aligned}$$

Простой марковский процесс является случайным процессом с памятью, но статистическая зависимость имеется только между значениями процесса в соседние моменты времени.

Более простой по сравнению с марковской моделью является дискретная случайная последовательность с независимыми дискретными значениями, или *последовательность Бернулли*. Она определяется совместной вероятностью, равной произведению вероятностей:

$$P(\xi_1 = a_{r1}, \xi_2 = a_{r2}, \dots, \xi_N = a_{rN}) = \prod_{i=1}^N P(\xi_i = a_{ri}). \quad (4.23)$$

Эта математическая модель определяет дискретный *источник без памяти*.

Дискретный источник называется *стационарным*, если его статистическое описание не зависит от начала отсчета времени.

Значения дискретного случайного процесса дискретного времени являются дискретными случайными величинами (см. рис. 4.5, б).

Дискретная случайная величина определяется интегральной функцией распределения:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{N-1} P(x = \xi_n), \quad \xi_n \leq x,$$

где N — число значений случайной величины; $p(x = \xi_n)$ — вероятность дискретной случайной величины.

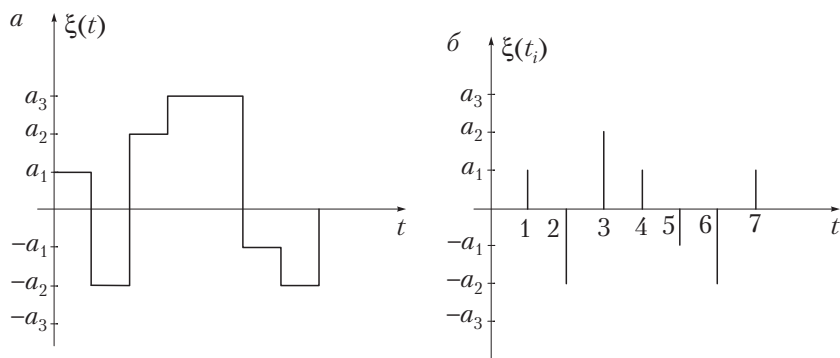


Рис. 4.5. Примеры случайных дискретных процессов

Интегральная функция распределения является непрерывной функцией аргумента. Она возрастает скачками при тех значениях x , которые являются возможными значениями дискретной случайной величины.

Значения функции определяются всеми значениями дискретной случайной величины, которые не превосходят x . Примером интегральной функции может быть ступенчатая функция, приведенная на рис. 4.2. Интегральная функция распределения дискретной случайной величины не дифференцируема. Поэтому дифференцированием этой функции нельзя найти плотность распределения вероятности дискретной случайной величины. Эта плотность выражается через вероятности случайных величин и дельта-функции:

$$w_1(x) = \sum_{n=0}^{N-1} P(x = \xi_n) \delta(x - \xi_n).$$

Интегрируя плотность распределения вероятности, находим интегральную функцию:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} P(x = \xi_n) \delta(x - \xi_n) dx = \sum_{n=0}^{N-1} P(x = \xi_n),$$

так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi_n) dx = 1.$$

При вычислении интегральной плотности использовано фильтрующее свойство дельта-функции.

Вычисление моментов первого, второго и т.д. порядков дискретной случайной величины обычно ведут по известным формулам теории вероятностей. В дополнение к этим формулам можно использовать и формулы для непрерывной случайной величины, если воспользоваться приведенным выше выражением для плотности распределения вероятности дискретной случайной величины. Например, момент первого порядка дискретной случайной величины (среднее значение) вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} m = M\{\xi\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x w_1(x) dx = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} P(x = \xi_n) \int_{-\infty}^{\infty} x \delta(x - \xi_n) dx = \sum_{n=0}^{N-1} \xi_n P(x = \xi_n). \end{aligned}$$

Что касается вычисления таких характеристик, как автокорреляционная функция, функция взаимной корреляции и т.д., то и эти характеристики для дискретных процессов также вычисляются по известным формулам. Так, автокорреляционная функция эргодического дискретного случайного процесса равна

$$M\{\xi_n, \xi_{n+q}\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \xi(t_n) \xi(t_{n+q}).$$

4.3. Функция корреляции и спектральная плотность мощности



Функция корреляции отражает степень статистической связи между значениями случайного процесса. При усреднении по ансамблю функция корреляции нецентрированного случайного процесса определяется формулой (4.10), причем значения случайных реализаций берут в соседние моменты времени t_1, t_2 .

Если процесс эргодический, то усреднение по ансамблю заменяется усреднением во времени и функция корреляции определяется формулой (4.19). Для центрированных случайных процессов

функция корреляции определяется формулой (4.11), а если процесс эргодический, то формулой

$$B_0(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - a(t)][\xi(t + \tau) - a(t + \tau)] dt. \quad (4.24)$$

Таким образом, функция корреляции эргодического случайного процесса определяет степень статистической связи между реализацией случайного процесса и сдвинутой на некоторое время копией этой реализации.

Функции (4.19), (4.24) принято называть *автокорреляционными*. Функция (4.20) называется *взаимно корреляционной* функцией. Если $\xi(t) = \gamma(t)$, то функция взаимной корреляции переходит в функцию автокорреляции.

Назовем основные свойства автокорреляционной функции.

1. Автокорреляционная функция является убывающей функцией. Значение ее при нулевом сдвиге максимально и равно средней мощности случайного процесса:

$$B(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi^2(t) dt = P_{\text{ср}}.$$

Значение автокорреляционной функции централизованного случайного процесса при нулевом сдвиге равно дисперсии случайного процесса:

$$B_0(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - a(t)]^2 dt = P_{0\text{ср}} = D\{\xi(t)\}.$$

Если среднее значение случайного процесса является постоянной величиной, то значение автокорреляционной функции при аргументе $\tau = \infty$ равно квадрату значения этой величины, т.е.

$$B(\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) + a][\xi(\infty) + a] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a^2 dt = a^2,$$

так как

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) \xi(\infty) dt = 0.$$

Последняя формула означает, что чем дальше отстоят друг от друга значения случайного процесса, тем слабее статистическая зависимость между ними.

2. Автокорреляционная функция является четной функцией:

$$B(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) \xi(t + \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) \xi(t - \tau) dt = B(-\tau).$$

3. Значение автокорреляционной функции максимально при нулевом сдвиге:

$$|B(0)| \geq B(\tau).$$

Данное свойство доказывается в теории вероятности.

При описании случайных процессов используют понятия: нормированная автокорреляционная функция и интервал корреляции. *Нормированная автокорреляционная функция* случайного процесса

$$b(t_1, t_2) = B(t_1, t_2) / \sqrt{D\{\xi(t_1)\} D\{\xi(t_2)\}};$$

стационарного процесса —

$$b(\tau) = B(\tau) / D\{\xi(t)\}.$$

Интервал корреляции равен интервалу времени между соседними значениями случайного центрированного процесса, при котором статистическая связь между этими значениями еще достаточно большая. Его значение равно длине основания прямоугольника с высотой, равной $B_0(0)$, если площадь этого прямоугольника равна площади, ограниченной кривой $B_0(\tau)$ и осями координат:

$$\tau_k = \frac{1}{B_0(0)} \int_0^\infty B_0(\tau) d\tau. \quad (4.25)$$

Понятие «автокорреляционная функция сигнала» применяют не только к случайным, но и к детерминированным функциям. Автокорреляционная функция детерминированного сигнала рассмотрена в § 2.4.

В гл. 2 введено понятие спектральной плотности детерминированного сигнала, найдено выражение (2.20) для спектральной плотности мощности, а также получена формула (2.25), которая определяет спектральную плотность мощности через автокорреляционную

функцию $B(\tau)$. Указанные формулы справедливы и для стационарного случайного процесса. Для оценки ширины спектральной плотности мощности принято использовать величину

$$\Delta f_3 = \frac{1}{G(0)} \int_0^{\infty} G(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{G(0)} \int_0^{\infty} G(\omega) df. \quad (4.26)$$

Принимая во внимание уравнение (2.25), найдем

$$G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} B_0(\tau) d\tau.$$

Из последнего уравнения получим

$$\int_0^{\infty} B_0(\tau) d\tau = \frac{1}{2} G(0). \quad (4.27)$$

Подставляя (4.27) в (4.25), имеем

$$\tau_k = \frac{1}{2} \frac{G(0)}{B_0(0)}. \quad (4.28)$$

Используя обратное преобразование Фурье от спектральной плотности мощности и уравнение (4.26), найдем

$$B_0(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} G(\omega) df = 2G(0)\Delta f_3.$$

Подставляя последнее равенство в (4.28), получим

$$\tau_k \Delta f_3 = 1/4.$$

Время корреляции тем меньше, чем больше ширина спектральной плотности и наоборот.



4.4. Нормальный случайный процесс

Нормальный случайный процесс занимает особое место при анализе систем связи. Он чаще, чем другие законы, встречается на практике, а его использование существенно упрощает расчеты.

Плотность распределения вероятности (n -мерная) нормального случайного процесса определяется формулой

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = K_n \exp \left\{ -\frac{1}{2D} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} \left[\frac{(x_i - a_i)}{\sigma_i} \frac{(x_j - a_j)}{\sigma_j} \right] \right\}, \quad (4.29)$$

где

$$K_n = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \sqrt{(2\pi)^n D}}, \quad D = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

$D_{i,j}$ — алгебраическое дополнение элемента r_{ij} в определителе D , $r_{ij} = M\{\xi_i \xi_j\} / (\sigma_i \sigma_j)$ — нормированная функция корреляции.

При $n = 1$ из формулы (4.29) получим выражение для одномерной плотности распределения вероятности:

$$w(x, t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp[-(x - a)^2 / 2\sigma^2], \quad (4.30)$$

где a , σ^2 — соответственно среднее значение и дисперсия нормальной случайной величины.

Совместная плотность распределения вероятности множества независимых случайных величин определяется формулой (4.6). Если при этом одномерные плотности распределения вероятности для каждого момента времени одинаковы и выражаются нормальным законом, то

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n (x_k - a)^2}. \quad (4.31)$$

Используя формулу (4.31), вычислим n -мерную плотность нормального стационарного эргодического центрированного процесса, который имеет равномерную спектральную плотность в полосе частот от 0 до F_B .

Пусть некоторая реализация задана непрерывной функцией $x(t)$ в интервале времени $[0; T]$, а ее спектр ограничен верхней граничной

частотой F_B . Эту функцию с некоторой погрешностью можно представить рядом (2.57), а энергию реализации — формулой (2.56).

Полагая, что переменные, входящие в выражение (4.31), являются выборочными значениями функции $x(t)$, а среднее значение случайного процесса равно нулю, перепишем выражение (4.31) с учетом формулы (2.56) в виде

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= w(\vec{x}) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{F_B}{\sigma^2} \int_0^T x^2(t) dt} = \\ &= \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

где $N_0 = \sigma^2/F_B$ — односторонняя спектральная плотность эргодического нормального случайного процесса, равная отношению мощности этого процесса к верхней граничной частоте.

Формула (4.32) позволяет найти:

□ вероятность реализации стационарного эргодического нормального случайного процесса:

$$\begin{aligned} P[x_1 < \xi_1 \leq x_1 + dx_1, x_2 < \xi_2 \leq x_2 + dx_2, \dots, x_n < \xi_n \leq x_n + dx_n] = \\ = w(\vec{x}) d\vec{x}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

где $\xi_k, k = 1, 2, 3, \dots, n$ — выборка этой реализации, $d\vec{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ — бесконечно малая область n -мерного пространства;

□ значение плотности распределения вероятности по заданной реализации:

$$w(\vec{x}) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T \xi^2(t) dt}; \quad (4.34)$$

□ значение вероятности реализации $\xi(t)$:

$$w(\vec{\xi}) d\vec{\xi} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T \xi^2(t) dt} d\vec{\xi}.$$

Вероятность реализации тем больше, чем меньше энергия этой реализации.

Найдем корреляционную функцию нормального стационарного эргодического центрированного процесса, полагая, что спектральная плотность мощности в полосе $[-\omega_B; \omega_B]$ постоянна и равна $N_0/2$:

$$B(\tau) = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{j\omega\tau} d\omega = N_0 F_B \frac{\sin \omega_B \tau}{\omega_B \tau}. \quad (4.35)$$

При значении $\omega_B \tau = \pi$ функция корреляции равна нулю. Это соответствует разности времени между двумя соседними значениями случайного процесса, равной $1/(2F_B)$. Следовательно, сечения процесса, разделенные этим интервалом, не коррелированы между собой.

Найдем предел, приняв во внимание формулу (П.1.2):

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_B \rightarrow \infty} B(\tau) &= \lim_{\omega_B \rightarrow \infty} \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{j\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{2} \delta(\tau). \end{aligned} \quad (4.36)$$

При стремлении граничной частоты к бесконечности корреляционная функция определяется дельта-функцией, для которой любые два не совпадающих во времени сечения случайного процесса не коррелированы между собой. Спектральная плотность такого процесса является постоянной величиной, равной

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{N_0}{2}. \quad (4.37)$$

Эргодический центрированный стационарный нормальный процесс, корреляционная функция которого равна дельта-функции, а спектральная плотность постоянна при всех частотах, называется **белым шумом**.

Белый шум является математической моделью реального нормального процесса, применимой в тех случаях, когда время корреляции много меньше постоянной времени четырехполюсника, на который действует этот процесс, или когда в пределах АЧХ четырехполюсника спектральную плотность процесса можно приближенно считать постоянной.

Дисперсия белого шума $B(0) = 0,5N_0\delta(0) = \infty$.



4.5. Узкополосные случайные процессы

Случайный процесс называется *узкополосным*, если ширина его спектра относительно мала по сравнению со средней частотой этого спектра. Подобные процессы возникают, например, на выходах линейных частотно-избирательных многокаскадных усилителей при действии на их входах теплового шума.

Узкополосный процесс можно записать в виде

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \vartheta(t)\cos[\omega_0(t) + \psi(t)] = \\ &= \vartheta(t)\cos\psi(t)\cos\omega_0 t - \vartheta(t)\sin\psi(t)\sin\omega_0 t = \\ &= A(t)\cos\omega_0 t + B(t)\sin\omega_0 t = a(t) + b(t),\end{aligned}$$

где $a(t)$, $b(t)$ — случайные составляющие узкополосного процесса; $\vartheta(t)$ — медленно меняющаяся амплитуда (огибающая); $\psi(t)$ — медленно меняющаяся фаза; ω_0 — средняя частота спектра; $A(t) = \vartheta(t) \times \cos\psi(t)$, $B(t) = -\vartheta(t)\sin\psi(t)$ — квадратурные составляющие узкополосного процесса.

Огибающая и фаза

$$\vartheta(t) = \sqrt{A^2(t) + B^2(t)}, \quad \psi(t) = \arctg[B(t)/A(t)].$$

Случайные составляющие имеют одинаковые мощности, их средние значения равны нулю, а функция взаимной корреляции равна

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(t)b(t)dt = 0.$$

Так как узкополосный процесс подчиняется нормальному закону, то и его квадратурные составляющие подчиняются нормальному закону и поэтому статистически независимы.

Найдем плотности распределения вероятностей огибающей $w(\alpha)$ и фазы $w(\varphi)$ узкополосного процесса. В прямоугольных координатах вероятность того, что сигнал $\xi(t)$ будет находиться в пределах прямоугольника, ограниченного сторонами $(x, x + dx)$ и $(y, y + dy)$, равна $w(x, y)dx dy$.

Вероятность этого же события с использованием полярных координат α, φ

$$w(x, y) dx dy = w(\alpha, \varphi) d\alpha d\varphi, \quad (4.38)$$

где $w(\alpha, \varphi) d\alpha d\varphi$ — вероятность того, что значение процесса $\xi(t)$ будет находиться в пределах площади, равной $\alpha d\alpha d\varphi$ (рис. 4.6).

Учитывая, что квадратурные составляющие независимы, найдем

$$w(x, y) dx dy = w(x) dx w(y) dy. \quad (4.39)$$

Кроме того, случайные величины $A(t), B(t)$ распределены по нормальному закону с нулевым средним значением и одинаковой дисперсией, т.е.

$$\left. \begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}, \\ w(y) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2\sigma^2}, \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

где σ^2 — дисперсия узкополосного процесса.

Покажем, что дисперсии случайных величин $a(t)$ и $b(t)$ одинаковы и равны половине дисперсии узкополосного процесса.

Вычислим дисперсию узкополосного процесса $\xi(t)$:

$$\overline{\xi^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [A(t) \cos \omega_0 t + B(t) \sin \omega_0 t]^2 dt =$$

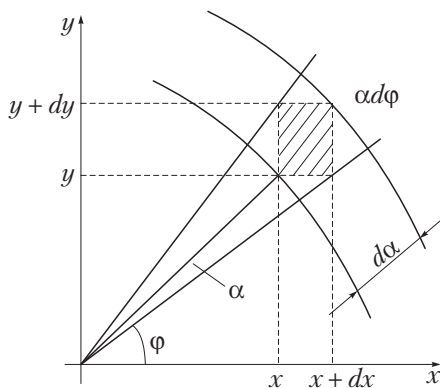


Рис. 4.6. К определению плотности вероятности огибающей и фазы узкополосного процесса

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A^2(t) \cos^2 \omega_0 t dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T A(t) B(t) \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t dt + \\
&\quad + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B^2(t) \sin^2 \omega_0 t dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A^2(t)}{2} dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{B^2(t)}{2} dt = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} = \sigma^2.
\end{aligned}$$

При вычислении принято во внимание, что

$$\int_0^T \cos 2\omega_0 t dt \approx 0, \quad \int_0^T \sin 2\omega_0 t dt \approx 0.$$

Подставляя выражение (4.40) в (4.39), получим

$$w(x, y) dxdy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dxdy = \frac{\alpha}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} d\alpha d\varphi, \quad (4.41)$$

так как $\alpha^2 = x^2 + y^2$, а площади $dxdy$ и $\alpha d\alpha d\varphi$ равны.

С учетом (4.38) и (4.41) найдем совместную плотность распределения случайных величин:

$$w(\alpha, \varphi) = \frac{\alpha}{2\pi\sigma^2} e^{-\alpha^2/(2\sigma^2)}. \quad (4.42)$$

Плотность распределения вероятности огибающей найдем, интегрируя (4.42) по переменной φ :

$$w(\alpha) = \int_0^{2\pi} w(\alpha, \varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\alpha}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} d\varphi = \frac{\alpha}{\sigma^2} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.43)$$

Эта плотность называется *распределением Рэлея*. График плотности показан на рис. 4.7.

Плотность распределения вероятности фазы найдем, интегрируя (4.42) по переменной α :

$$w(\varphi) = \int_0^\infty \frac{\alpha}{2\pi\sigma^2} e^{-\alpha^2/2\sigma^2} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty w(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2\pi},$$

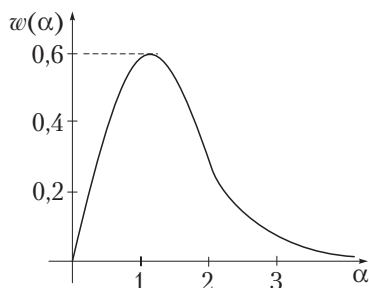


Рис. 4.7. Плотность вероятности огибающей узкополосного случайного процесса

так как

$$w(\alpha) = \frac{\alpha}{\sigma^2} e^{-\alpha^2/2\sigma^2}, \quad \text{а} \quad \int_0^{\infty} w(\alpha) d\alpha = 1.$$

График функций $w(\varphi)$ приведен на рис. 4.8.

Аналогично вычисляются плотности распределения вероятностей для огибающей и фазы смеси сигнала и узкополосного шума:

$$Z(t) = u(t) + \xi(t) = \eta \cos \omega_0 t + \vartheta(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)],$$

где η — амплитуда сигнала.

Плотность распределения вероятности огибающей суммы сигнала и шума:

$$w(\alpha) = \frac{\alpha}{\sigma^2} e^{-\frac{\alpha^2 + \eta^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{\alpha\eta}{\sigma^2}\right), \quad (4.44)$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

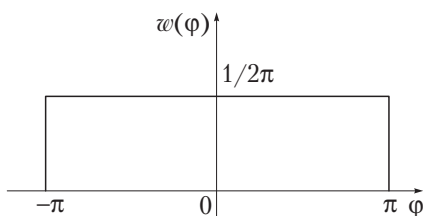


Рис. 4.8. Плотность распределения вероятности фазы узкополосного случайного процесса

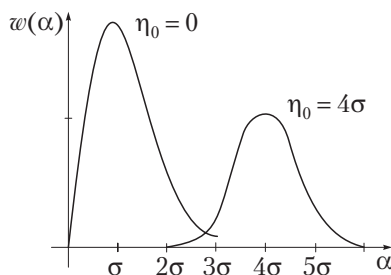


Рис. 4.9. Плотность распределения вероятности огибающей суммы гармонического сигнала и узкополосного шума

При малых отношениях сигнал/шум плотность распределения стремится к рэлеевскому закону, а при больших отношениях — к нормальному (рис. 4.9). Выражение для плотности вероятности фазы

$$w(\varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{2} \frac{\eta \cos \varphi}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[1 - \Phi\left(\frac{\eta \cos \varphi}{\sigma}\right) \right] e^{-\frac{\eta^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma^2}}, \quad (4.45)$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ — функция Крампа.

4.6. Геометрические представления случайных сигналов и помех



Геометрические представления детерминированных сигналов, приведенные в гл. 2, используются при анализе случайных сигналов и помех. Так, совокупность выборочных значений реализации случайного процесса может быть представлена n -мерным вектором, а ансамблю поставлено в однозначное соответствие множество таких векторов в некоторой области векторного пространства.

Если задана n -мерная плотность распределения вероятности, то вероятность того, что множество n -мерных векторов находится в области V векторного пространства,

$$P = \int \cdots \int_V w(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n,$$

где интегрирование ведется по этой области.

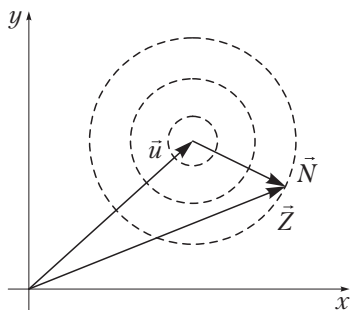


Рис. 4.10. Векторная диаграмма суммы сигнала и помехи

Можно найти также вероятность того, что вектор, определяющий заданную реализацию, попадет в бесконечно малую часть области

$$dV = w(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (4.46)$$

Эта вероятность называется вероятностью реализации некоторого n -мерного вектора.

Аддитивной смеси сигнала и шума (помехи) $Z(t) = u(t) + N(t)$, не содержащей спектральных компонент с частотой, большей величины F_B , можно сопоставить сумму n -мерных векторов сигнала и помехи (рис. 4.10). При переходе от одной реализации смеси к другой вектор помехи занимает новое положение относительно вектора сигнала. При этом около конца вектора сигнала можно указать область, за пределами которой вероятность нахождения вектора помехи будет весьма малой. Радиус этой области определяется нормой

$$d = \sqrt{2TF_B P_{\text{ш max}}},$$

где $P_{\text{ш max}}$ — значение максимальной мощности реализации помехи.

Контрольные вопросы

1. В чем различие случайного и детерминированного процессов?
2. Какие характеристики случайных процессов известны? Как связаны между собой функция распределения и плотность распределения вероятности? Перечислите свойства плотности распределения вероятности.
3. При каком условии исчерпывающей характеристикой случайной функции является ее одномерная плотность распределения вероятности?

4. Какие числовые характеристики плотности распределения вероятности известны?
5. Что такое центрированный случайный процесс?
6. Как определяются математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция?
7. Какие случайные процессы называются стационарными, нестационарными, эргодическими?
8. Как определяется математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция эргодического случайного процесса?
9. Какие модели дискретных случайных процессов известны?
10. Какой случайный процесс называется марковским?
11. Какими основными свойствами обладает корреляционная функция эргодического случайного процесса?
12. Какая связь существует между шириной спектральной плотности мощности и интервалом корреляции случайного процесса?
13. Какой случайный процесс называется нормальным?
14. Как аналитически выражается n -мерная плотность распределения вероятности нормального белого шума?
15. Каким законам распределения подчиняются огибающая и фаза узкополосного нормального случайного процесса?



КАНАЛЫ СВЯЗИ

5.1. Общие сведения о каналах передачи информации

5.1.1. Классификация каналов

Каналы связи определяются:

- ☐ назначением — телеграфные, телефонные, телевизионные;
- ☐ физической средой распространения сигналов — проводные, волноводные, радио;
- ☐ диапазоном используемых частот — высокочастотные, низкочастотные;
- ☐ способом распространения электромагнитных колебаний — с открытым или закрытым распространением;
- ☐ характером информационных параметров сигналов на входе и выходе — непрерывные, дискретные, дискретно-непрерывные.

В каналах с закрытым распространением электромагнитная волна распространяется по направляющим линиям: кабельным, волноводным, оптоволоконным.

В каналах с открытым распространением электромагнитная волна распространяется в космическом, околоземном или водном пространстве.

К радиодиапазону относят частоты в пределах от 30 до $3 \cdot 10^{12}$ Гц (табл. 5.1).

К оптическому относят диапазон частот от 10^{13} до 10^{15} Гц.

Таблица 5.1

Диапазоны частот

Диапазон частот, Гц	Диапазон волн, м	Название частот	Название волн
30...300	$10^6 \dots 10^7$	Сверхнизкие	—
$300 \dots 3 \cdot 10^3$	$10^5 \dots 10^6$	Инфранизкие	—
$3 \cdot 10^3 \dots 3 \cdot 10^4$	$10^4 \dots 10^5$	Очень низкие	Мириаметровые
$3 \cdot 10^4 \dots 3 \cdot 10^5$	$10^3 \dots 10^4$	Низкие	Километровые
$3 \cdot 10^5 \dots 3 \cdot 10^6$	100...1 000	Средние	Гектометровые
$3 \cdot 10^6 \dots 3 \cdot 10^7$	10...100	Высокие	Декаметровые
$3 \cdot 10^7 \dots 3 \cdot 10^8$	1...10	Очень высокие	Метровые
$3 \cdot 10^8 \dots 3 \cdot 10^9$	$10^{-1} \dots 1$	Ультравысокие	Дециметровые
$3 \cdot 10^9 \dots 3 \cdot 10^{10}$	$10^{-2} \dots 10^{-1}$	Сверхвысокие	Сантиметровые
$3 \cdot 10^{10} \dots 3 \cdot 10^{11}$	$10^{-3} \dots 10^{-2}$	Крайне высокие	Миллиметровые
$3 \cdot 10^{11} \dots 3 \cdot 10^{12}$	$10^{-4} \dots 10^{-3}$	Гипервысокие	Децимиллиметровые

5.1.2. Краткие сведения о причинах искажений сигналов

При передаче сигналов по каналу связи их параметры изменяются. Различают *детерминированные* и *случайные* изменения этих параметров. Первые сводятся к изменению масштаба сигнала (усилению или ослаблению) и к задержке его во времени. Изменение масштаба можно скомпенсировать усилением (ослаблением) сигнала. Задержку скомпенсировать нельзя, и это сказывается на своевременности доставки сообщения (особенно сильно в протяженных каналах).

При передаче сигнала изменяется и его форма. Искажения формы могут быть детерминированными и случайными, линейными и нелинейными. Они связаны с нарушением соотношений между амплитудами, а также фазами гармонических составляющих сигнала при его передаче. Для того чтобы детерминированные линейные искажения отсутствовали, нужно, чтобы модуль коэффициента передачи линейного четырехполюсника равнялся постоянной величине K , а время запаздывания было бы постоянным для всех гармонических составляющих сигнала.

Неравномерность АЧХ, ФЧХ и ограниченность ширины полосы канала приводят к искажению формы передаваемых сигналов. Например, прямоугольные импульсы двоичной информационной последовательности «расплываются» во времени. При этом на выходе канала могут одновременно присутствовать отклики от нескольких импульсов: принимаемого в данном тактовом интервале и принятых в предыдущие интервалы откликов. Подобное наложение может существенно ограничить скорость передачи дискретной информации.

Случайные линейные искажения сигнала возникают при случайном изменении параметров среды распространения: свободного пространства, электрического или оптического кабеля. Рассмотрим искажения, которые возникают в системах радиосвязи. Они во многом определяются характером распространения радиоволн. В околоземном пространстве излученный антенной передатчика радиосигнал, отражаясь от ионизированных слоев, приходит к антенне приемника разными путями. Каждому пути соответствует свой сигнал с определенной амплитудой и задержкой. Если бы высота ионизированных слоев и концентрация заряженных частиц этих слоев оставались постоянными, то и параметры сигналов были бы постоянными. Однако из-за изменения высоты ионизированных слоев в течение суток и случайного изменения концентрации заряженных частиц параметры сигналов флуктуируют.

Пусть излучаемый передающей антенной сигнал $u(t) = e^{j\omega t}$. На выходе радиоканала суммарный сигнал

$$u_{\text{вых}}(t) = \sum_{i=1}^L K_i e^{j\omega(t-\tau_i)} = \dot{K} e^{j\omega t}, \quad (5.1)$$

где L — число путей; K_i — коэффициент ослабления амплитуды сигнала; τ_i — задержка сигнала для i -го пути распространения;

$$\dot{K} = \sum_{i=1}^L K_i e^{-j\omega\tau_i}. \quad (5.2)$$

Передаточная функция канала, равная отношению выходного сигнала к входному, является случайной величиной из-за случайного изменения ее параметров. Кроме того, она зависит от частоты.

Перепишем равенство (5.2) в виде

$$\begin{aligned}\dot{K} &= \sum_{i=1}^L K_i e^{-j\omega\tau_i} = \sum_{i=1}^L K_i \cos \omega\tau_i - j \sum_{i=1}^L K_i \sin \omega\tau_i = \\ &= X(\omega) + jY(\omega),\end{aligned}\quad (5.3)$$

где

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^L K_i \cos \omega\tau_i, \quad Y(\omega) = -\sum_{i=1}^L K_i \sin \omega\tau_i.$$

Для большого числа путей L действительная и мнимая части коэффициента передачи являются нормально распределенными случайными величинами. Они имеют одинаковые дисперсии, а их математические ожидания равны нулю. Можно показать, что одномерное *распределение модуля коэффициента передачи подчинено рэлеевскому закону*:

$$\left. \begin{aligned} w(k) &= \frac{k}{\sigma^2} e^{-k^2/2\sigma^2}, \quad k \geq 0, \\ w(k) &= 0, \quad k < 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Фаза результирующего сигнала (5.1) распределена в интервале $(0; 2\pi)$ по равномерному закону.

Изменение амплитуды сигнала на входе приемника (на выходе линии связи), определяемое условиями распространения радиоволн, называется **замиранием сигнала**. Замирание, подчиняющееся закону (5.4), называется *рэлеевским*.

Если в месте приема присутствуют случайные (диффузионно-отраженные) сигналы и регулярный (не замирающий) сигнал (луч), который значительно больше первых, то коэффициент передачи канала определяется *обобщенным рэлеевским законом*:

$$w(k) = \frac{k}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2} - q^2\right) I_0\left(\frac{k\sqrt{2q}}{\sigma}\right), \quad k \geq 0, \quad (5.5)$$

где q^2 — отношение мощностей регулярной и случайной (флуктуирующей) составляющих; $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Пусть по каналу с замираниями сигнала передается сигнал, причем среднеквадратичное отклонение запаздывания в каждом отдельном луче удовлетворяет условию

$$\sigma_{\tau} \ll 1/F,$$

где F — ширина спектра сигнала.

Если изменения амплитуд и начальных фаз спектральных компонент сигнала на различных частотах почти одинаковы, то все составляющие спектра замирают «дружно». Такие замирания называются *общими* или *гладкими*.

Если условие $\sigma_{\tau} \ll 1/F$ не выполняется, то замирания разных спектральных компонент не одинаковы. Они называются *селективными*.

Детерминированные линейные искажения можно скомпенсировать. Одним из способов компенсации является включение в канал корректирующего четырехполюсника (рис. 5.1). Он подбирается так, чтобы выполнить равенство

$$K(j\omega)L(j\omega) = Ke^{-j\omega t_3}, \quad (5.6)$$

где $L(j\omega)$ — коэффициент передачи корректирующего четырехполюсника; K — постоянное число; t_3 — задержка сигнала.

На практике полностью выполнить условие (5.6) не удастся. Поэтому коррекцию делают так, чтобы искажения не выходили за установленные пределы. Случайные линейные искажения с помощью корректирующих четырехполюсников скомпенсировать нельзя.

Нелинейные искажения возникают в выходных цепях передатчиков, входных цепях приемников, усилителях промежуточной частоты и других устройствах, входящих в аппаратуру канала связи, из-за нелинейности их характеристик.

Анализ нелинейных искажений ведут, используя представление нелинейного четырехполюсника в виде безынерционной и инерционной частей. При нелинейном преобразовании выходной спектр сигнала обогащается новыми спектральными составляющими.



Рис. 5.1. Корректор линейных искажений

Часть из них вместе с полезными спектральными составляющими попадает в полосу пропускания линейной части нелинейного четырехполосника и появляется на его выходе.

Для оценки нелинейных искажений используется коэффициент нелинейных искажений, определяемый как отношение корня квадратного из суммы квадратов амплитуд всех паразитных продуктов преобразования на выходе нелинейного четырехполосника к амплитуде полезной составляющей. Частным случаем коэффициента нелинейных искажений является *коэффициент гармоник*. Он равен отношению корня квадратного из суммы квадратов амплитуд всех гармоник сигнала, за исключением полезной гармоники, к амплитуде полезной составляющей. Если полезной является первая гармоника, коэффициент гармоник

$$K_r = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + \dots}}{A_1}. \quad (5.7)$$

Нормы на допустимые значения нелинейных искажений определяются устройствами, в которых возникают эти искажения.

5.1.3. Помехи в каналах связи

Помехи, как указывалось выше, разрушают форму сигнала. Это приводит к необратимым потерям передаваемой информации. В зависимости от места нахождения источника различают внутренние и внешние помехи.

К **внутренним помехам**, возникающим в самом канале, относятся: *флуктуационные шумы* входных каскадов приемника, линий передачи сигналов от передатчика к приемнику и т.д.; электрические сигналы, попадающие в приемник из-за плохой экранировки между каскадами и блоками аппаратуры. Флуктуационные шумы содержат тепловую и дробовую составляющие. *Тепловой шум* возникает из-за теплового движения носителей заряда. *Дробовой шум* обусловлен дискретной природой носителей заряда и возникает на выходах электровакуумных и полупроводниковых приборов. Тепловые и дробовые шумы распределяются по нормальному закону с нулевым средним значением.

В диапазоне оптических частот к тепловым и дробовым шумам добавляется *квантовый шум*. Он возникает в результате преобра-

зования оптического сигнала в электрический ток и обусловлен дискретной природой этого преобразования.

Внешние помехи возникают вне канала связи. К ним относятся помехи:

- ☐ атмосферные;
- ☐ космические;
- ☐ промышленные;
- ☐ от других систем связи.

Атмосферные помехи возникают в результате физических процессов, протекающих в земной атмосфере. Мощным источником этих помех являются грозовые разряды, излучение которых скаывается практически во всем радиодиапазоне.

Космические помехи оказывают влияние на системы радиосвязи, работающие на частотах более 30 МГц. Источниками этих помех являются Солнце, радиозвезды, межзвездные газы.

Промышленные помехи создаются различными промышленными установками, работой электрического транспорта, линиями электропередачи.

Помехи от других систем связи, радиолокационных и навигационных систем могут превышать другие помехи. Увеличению их уровня способствует нарушение регламента распределения рабочих частот, невысокая стабильность генераторов, плохая фильтрация побочных гармоник излучаемых сигналов.

Различают помехи:

- ☐ аддитивные;
- ☐ мультипликативные.

Искаженный помехами сигнал можно представить в виде

$$z(t) = u(t)\xi_m(t) + \xi_a(t),$$

где $u(t)$ — неискаженный помехами сигнал; $\xi_m(t)$ — мультипликативная помеха; $\xi_a(t)$ — аддитивная помеха.

Причиной возникновения мультипликативной помехи является непрерывное или дискретное изменение параметров тракта передачи.

В зависимости от спектральных и временных характеристик к аддитивной помехе относят:

- ☐ сосредоточенную по спектру;
- ☐ импульсную;
- ☐ флуктуационную.

К сосредоточенной по спектру помехе относят сигнал другой радиостанции, а также излучение генератора высокой частоты, используемого в промышленности, на транспорте, в медицинском учреждении. Ширина спектральной плотности этой помехи, как правило, намного меньше ширины полосы пропускания системы связи, но интенсивность может быть весьма большой.

К импульсной помехе относят одиночные импульсы или пакеты из импульсов, следующие с большим периодом повторения. Источниками импульсных помех являются: грозовые разряды, электро-транспорт, электрические промышленные установки.



5.2. Математические модели каналов связи

5.2.1. Модель непрерывного канала без шума

Математическая модель канала связи, необходимая для проведения исследований, считается заданной, если известны оператор преобразования, а также условия и ограничения, накладываемые как на канал, так и на входные и выходные сигналы. Математическая модель реального канала связи достаточно сложная. Это объясняется следующими причинами:

- оператор L , наряду с линейными, содержит также нелинейные и параметрические преобразования;
- в канале присутствуют помехи;
- входной сигнал является случайным.

Часто сложная математическая модель не позволяет найти решение поставленной задачи. Поэтому пользуются упрощенными моделями. В них используют представление канала в виде последовательно соединенных четырехполюсников (линейных, нелинейных, параметрических). Упрощение задачи дает также выделение из канала его дискретной, непрерывной и дискретно-непрерывных частей. Результаты анализа во многом зависят от условий и ограничений, которые накладываются на сигналы и помехи. Это касается законов их распределения и физических характеристик сигналов, таких как длительность, ширина спектра, мощность.

Так, при анализе кабельных каналов используют линейный четырехполюсник с постоянным коэффициентом передачи (рис. 5.2).

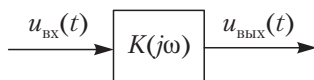


Рис. 5.2. Простая модель непрерывного канала

Сигналы на его входе и выходе являются непрерывными по уровню и времени, а входной сигнал лежит в заданной полосе частот. Мощность сигнала ограничена. Помеха на входе канала отсутствует. Модель имеет существенный недостаток, так как не учитывает присутствия помех, которые всегда имеются в реальных каналах.

5.2.2. Модель непрерывного канала с аддитивным гауссовым шумом

Математическая модель, более точно описывающая реальные кабельные каналы, учитывает присутствие помех. Она включает:

- представление канала в виде линейного четырехполюсника с постоянными параметрами и заданной шириной полосы;
- описание сигналов на входе и выходе канала;
- описание помех.

Если входной сигнал является случайным, то задают не только его физические характеристики, но и n -мерную плотность распределения вероятности $w(\vec{x})$. То же относится и к помехе на выходе канала. Для нее задают физические характеристики (например, среднюю мощность) и n -мерную плотность распределения вероятности $w(\vec{r})$.

Наиболее часто применяемой математической моделью помехи является эргодический нормальный случайный процесс с нулевым средним значением и n -мерной плотностью вида (4.34). Как правило, эта помеха является аддитивной. Поэтому смесь сигнала и помехи (шума) записывают в виде

$$z(t) = ku(t - \tau) + \xi(t),$$

где k — постоянный коэффициент, определяющий масштаб (усиление или ослабление) сигнала; τ — постоянная задержка сигнала.

В случае присутствия в смеси одного из возможного множества сигналов используют условную плотность распределения вероятности:

$$w(\vec{y}/\vec{u}) = w(y_1, y_2, \dots, y_n/u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\partial^n F(\vec{y}/\vec{u})}{\partial \vec{y}},$$

где функция распределения определяется вероятностью того, что для заданного сигнального вектора $u_i = u(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, выборочные значения смеси не превосходят значений неслучайных аргументов:

$$F(\vec{y}/\vec{u}) = P[z_1 \leq y_1, z_2 \leq y_2, \dots, z_n \leq y_n/u_1, u_2, \dots, u_n].$$

Учитывая, что $y_k = x_k + r_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, и полагая, что $x_k = u_k$, найдем вероятность:

$$\begin{aligned} P[z_1 \leq x_1 + r_1, z_2 \leq x_2 + r_2, \dots, z_n \leq x_n + r_n] = \\ = P[z_1 - u_1 \leq r_1, z_2 - u_2 \leq r_2, \dots, z_n - u_n \leq r_n]. \end{aligned}$$

Следовательно, условная плотность равна плотности распределения шума $w(\vec{y}/\vec{u}) = w(\vec{r})$, причем эту условную плотность можно найти по формуле (4.34) с помощью подстановки:

$$\xi(t) = z(t) - ku(t - \tau).$$

Условная плотность

$$w(\vec{y}/\vec{u}) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - ku(t - \tau)]^2 dt}, \quad (5.8)$$

где N_0 — мощность шума, приходящаяся на единицу полосы, равная отношению мощности шума σ^2 и верхней граничной частоты F_B .

Выражение (5.8) называется *функцией правдоподобия*. Она позволяет определить вероятность реализации смеси сигнала и шума на выходе канала при условии присутствия на входе заданной реализации сигнала.

5.2.3. Канал с неопределенной фазой сигнала

Данная математическая модель используется для описания каналов связи с флуктуациями сред, по которым распространяются сигналы. Это радиоканалы в КВ и УКВ диапазонах, некоторые проводные каналы и др. Флуктуации среды случайным образом изменяют задержку сигнала, что приводит к случайному изменению его фазы.

Структура канала определяется линейным четырехполюсником (рис. 5.3).

Входной сигнал

$$u_{\text{вх}}(t) = \eta \cos \omega_0 t. \quad (5.9)$$

Его амплитуда меняется случайным образом в соответствии с сообщением.

Сигнал на выходе канала

$$u_{\text{вых}}(t) = K\eta \cos[\omega_0(t - \tau)] = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (5.10)$$

где A — амплитуда сигнала, равная ослабленной (усиленной) в K раз амплитуде входного сигнала; φ — начальная фаза сигнала, равная $-\omega_0 \tau$.

При прохождении по каналу связи сигнал приобретает случайный набег фазы из-за флуктуации длины пути распространения и нестабильности частот опорных генераторов, которые входят в состав аппаратуры канала связи.

Смесь сигнала и шума на выходе канала

$$z(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \xi(t). \quad (5.11)$$

Здесь амплитуда повторяет изменения амплитуды входного сигнала; фаза случайна и имеет равномерный закон распределения

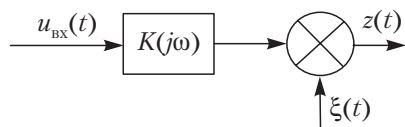


Рис. 5.3. Модель непрерывного канала с аддитивным гауссовым шумом

в интервале $(0; 2\pi)$ (см. рис. 4.8); шум является нормальным белым шумом с равномерной спектральной плотностью N_0 и нулевым средним значением.

Функция правдоподобия (условная плотность распределения вероятности) определяется формулой

$$w(\bar{y}/A, \varphi) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - A \cos(\omega_0 t + \varphi)]^2 dt} \quad (5.12)$$

Выражение (5.12), в отличие от выражения (5.8), зависит от случайных параметров: фазы и амплитуды сигнала. Поскольку фаза в данном случае не модулирована передаваемым сообщением, ее относят к паразитным параметрам.

Математическая модель канала с общими замираниями описывается аналогично, но множитель K , входящий в формулу (5.10), как и фаза, считается паразитным параметром.

Если распределение огибающей подчиняется уравнению (5.4), то в этом случае канал связи называется *каналом с рэлеевскими замираниями*.

5.2.4. Канал с межсимвольной интерференцией и аддитивным шумом

Межсимвольная интерференция возникает при передаче двоичных сигналов, если скорость передачи больше ширины полосы пропускания канала.

В радиоканалах причиной межсимвольной интерференции является многолучевое распространение радиоволн. В этом случае к аддитивному шуму добавляется специфическая помеха, равная сумме откликов канала на импульсы двоичного сигнала, которые были переданы ранее. Математическая модель канала описывает входной сигнал, структуру канала, которая определяется коэффициентом передачи, а также выходной сигнал, специфическую помеху и флуктуационный шум.

Более простой является модель, для которой параметры коэффициента передачи не меняются во времени, а сигналы на входе и выходе связаны детерминированными соотношениями.

5.2.5. Математические модели дискретных каналов связи

Сигналы на входе и выходе дискретного канала являются дискретными.

Математическая модель этого канала определяется:

□ алфавитом кодовых символов на входе $\{a_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, и на выходе $\{b_j\}$, $j = 1, 2, \dots, n$;

□ априорными вероятностями появления символов на входе канала;

□ вероятностями перехода $P(b_j/a_i)$, которые определяют вероятность того, что при передаче символа a_i на выходе канала появится символ b_j .

Если вероятность $P(b_j/a_i)$ не зависит от времени и от ранее принятых символов, то такой канал называется *однородным* и *без памяти*.

В симметричном однородном канале без памяти алфавит кодовых символов на входе совпадает с алфавитом на выходе, а вероятности перехода определяются равенствами

$$P(b_j/a_i) = \begin{cases} p/(m-1) & \text{при } i \neq j, \\ 1-p & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (5.13)$$

Любой символ a_i может перейти в другой символ b_j с равной вероятностью $p/(m-1)$. Эти переходы определяют вероятность ошибки, равную p . Кроме того, любой входной символ с вероятностью $(1-p)$ воспроизводится на выходе канала правильно.

В двоичном симметричном канале без памяти $m = 2$ и

$$P(b_j/a_i) = \begin{cases} p & \text{при } i \neq j, \\ 1-p & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (5.14)$$

Вероятности перехода (5.14) схематично показаны на рис. 5.4. Вероятность перехода нуля в нуль равна $1-p$, нуля в единицу — p . Соответственно, вероятность перехода единицы в единицу равна $1-p$, единицы в нуль — p .

Ошибка называется *q-кратной* (одно-, двух- и т.д.), если из n передаваемых символов q переданы с ошибкой. *Вектором ошибки* в двоичном канале $\{e_i\}$ является последовательность нулей и единиц, каждый элемент которой определен суммой по модулю два

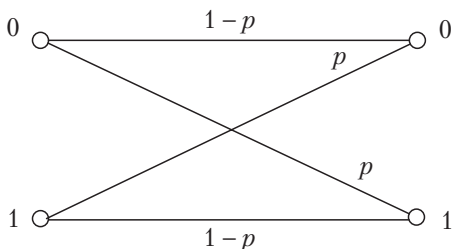


Рис. 5.4. Переходные вероятности в двоичном симметричном канале

элементов входной и выходной последовательностей, находящихся на одних и тех же позициях, т.е.

$$\{e_i\} = \{a_i + b_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где «+» — знак суммирования по модулю два.

Очевидно, что q -кратной ошибке в двоичном симметричном канале соответствует такой вектор ошибки, у которого на любых позициях число единиц равно q . На остальных $n - q$ позициях этого вектора элементы равны нулю. В симметричном канале без памяти статистическая зависимость между передаваемыми символами отсутствует. Поэтому вероятность того, что произойдет q ошибок, расположенных как угодно на протяжении последовательности длиной n , равна

$$\begin{aligned} P(q) &= C_n^q \left(\frac{p}{m-1} \right)^q (1-p)^{n-q} = \\ &= \frac{n!}{q!(n-q)!} \left(\frac{p}{m-1} \right)^q (1-p)^{n-q}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

где C_n^q — биномиальный коэффициент, равный числу различных сочетаний q ошибок в последовательности длиной n .

Несимметричный однородный двоичный канал без памяти отличается от рассмотренного тем, что вероятности перехода зависят от того, какой символ передается. Поэтому $P(1/0) \neq P(0/1)$ (рис. 5.5).

Симметричный однородный двоичный канал без памяти со стиранием содержит дополнительный выходной символ, обозна-

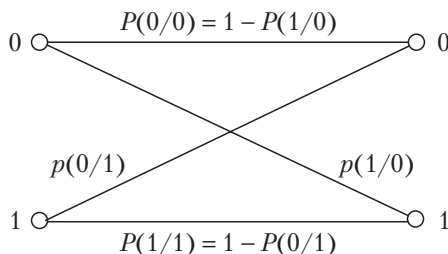


Рис. 5.5. Переходные вероятности в двоичном несимметричном канале

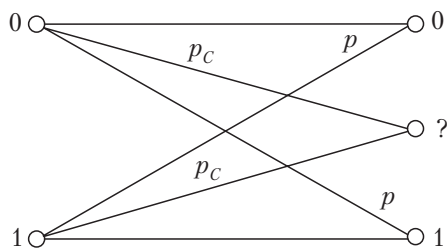


Рис. 5.6. Переходные вероятности в симметричном однородном канале без памяти и со стиранием

ченный на рис. 5.6 знаком «?». Вероятность правильной передачи нуля и единицы в двоичном симметричном канале определяется не только условными вероятностями перехода, но и вероятностью стирания. Состояние стирания символа в канале связи возникает всякий раз, когда решающая схема демодулятора, принимающая решение о том, какой из символов 0 или 1 передается, не может надежно опознать этот символ.

Расчет вероятностей ошибок в двоичных каналах связи приведен в гл. 7.

5.2.6. Математическая модель дискретно-непрерывного канала связи

В этом канале входные сигналы дискретны, а выходные — непрерывны.

Математическая модель дискретно-непрерывного канала с аддитивным гауссовым белым шумом почти совпадает с моделью

непрерывного канала, за исключением того, что на входе вместо непрерывного задают дискретный сигнал, который определяется количеством дискретных значений (букв алфавита) и соответствующими априорными вероятностями. Функция правдоподобия

$$w(\bar{y}/a_i) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - u_i(t)]^2 dt}, \quad (5.16)$$

где a_i — i -я буква; $u_i(t)$ — форма сигнала, соответствующая этой букве.

Функция (5.16) задается при условии, что все параметры сигнала (за исключением информационного параметра) являются известными точно. Но если сигнал содержит случайные параметры, функция правдоподобия становится случайной.

Если плотность распределения вероятности (5.16) не зависит от времени и от того, какие символы передавались ранее, дискретно-непрерывный канал называется *однородным (стационарным)* и *без памяти*. Если эта плотность зависит от времени, канал называется *нестационарным*. Канал имеет память, если плотность распределения вероятности зависит от предыдущих символов.

5.2.7. Особенности оптических каналов связи

Оптические каналы связи могут быть ненаправленными и направленными.

В *ненаправленном* оптическом канале электромагнитное поле распространяется в области пространства, которое определяется диаграммой направленности передающей антенны. Средой распространения в этом случае является свободное космическое, воздушное или водное пространство.

В простейшем типе ненаправленного канала — космическом пространстве искажения сигнала часто отсутствуют. Изменяется только его амплитуда и задержка.

В *направленных* каналах для распространения электромагнитного поля используются специальные волноводы — оптические кабели.

Если в среде распространения появляются физические неоднородности и посторонние частицы, то характер принимаемого

сигнала будет определяться также и эффектами, связанными с рассеянием электромагнитного поля этими частицами и неоднородностями. При рассеивании, как правило, возникает многолучевое распространение, что приводит при флуктуациях физических неоднородностей и положений посторонних частиц к замираниям сигнала.

В направленном канале оптический луч распространяется в оптическом кабеле, основным элементом которого является оптический волновод — круглый стержень из оптически прозрачного диэлектрика. Оптические волноводы называют также *волоконными световодами*.

Основными параметрами оптических волноводов являются:

- затухание сигнала;
- дисперсия;
- полоса пропускания.

Затухание обусловлено в основном поглощением энергии в диэлектрике и ее рассеянием из-за неоднородностей, которые возникают при изготовлении оптического волновода. Дисперсия обусловлена множеством типов колебаний (модами) распространяющегося поля. Эти колебания в направленном канале накладываются друг на друга, причем каждая мода имеет свой путь и свою скорость распространения. Поэтому при наложении множества задержанных во времени колебаний возникает эффект, напоминающий многолучевое распространение радиоволн.

При передаче импульсов вследствие этого эффекта возникает искажение их формы — импульсы удлиняются. Это ведет к ограничению скорости передаваемой информации.

Особенностью оптических систем связи является случайный характер сигнала на выходе преобразователя (фотодетектора) принятого света (поля) в электрическое напряжение или ток, вне зависимости от того, является оптическое поле стохастическим из-за его рассеяния или детерминированным. Процесс выделения поля фотодетектором сопровождается помехами различных типов. В ненаправленном канале наиболее мощной помехой является фоновое излучение. Его можно существенно уменьшить, применяя оптические волноводы. Среди других помех наибольшее влияние оказывают флуктуационные шумы, возникающие в фотодетекторе, во входной цепи усилителя оптического приемника, а также в других усилителях.



5.3. Воздействие сигналов и помех на звенья каналов связи

5.3.1. Постановка задачи

При прохождении сигналов и помех через каналы связи происходит изменение их реализаций. Для оценки качества передачи информации необходимо знать эти изменения, уметь производить соответствующие расчеты.

Рассчитывать законы распределения случайных процессов и их статистические характеристики достаточно сложно для большинства реальных каналов связи. Упрощение расчетов может быть достигнуто:

- разбиением канала связи на отдельные функционально определенные блоки;
- представлением каждого отдельного блока в виде последовательно соединенных линейных и нелинейных четырехполюсников;
- разбиением нелинейных четырехполюсников на две части: линейную (инерционную) и нелинейную (безынерционную).

Применение подобной идеализации позволяет свести сложную задачу к двум частным:

- расчету закона распределения на выходе линейного четырехполюсника;
- расчету закона распределения на выходе нелинейного четырехполюсника.

Каждая из этих задач формулируется следующим образом: для заданной плотности распределения вероятности входного случайного процесса $\xi_1(t)$ найти плотность распределения вероятностей выходного случайного процесса $\xi_2(t)$.

Наиболее сложной является задача определения плотности на выходе линейного (инерционного) четырехполюсника, которая легко решается только для одного частного случая, когда на входе действует нормальный шум. Менее сложной (но трудно решаемой задачей) является задача определения плотности вероятности случайного процесса на выходе безынерционного, нелинейного звена.

Как показано в гл. 4, по известной плотности вероятности можно вычислить моменты распределения, в том числе среднее

значение и корреляционную функцию. В ряде случаев, однако, можно вычислить эти характеристики без определения соответствующих плотностей распределения вероятностей.

5.3.2. Прохождение случайных сигналов и помех через линейные системы

Пусть четырехполосник является линейным и на его вход подан стационарный случайный процесс с нулевым средним значением. Спектральная плотность этого процесса $G_1(\omega)$, корреляционная функция — $B_1(\tau)$. Коэффициент передачи четырехполосника равен $K(j\omega)$. Требуется найти среднее значение, корреляционную функцию и соответствующую ей спектральную плотность мощности случайного процесса на выходе четырехполосника.

Если на входе присутствует стационарный случайный процесс с нулевым средним значением, то на выходе установившийся процесс также будет стационарным.

Можно показать, что спектральная плотность мощности входного стационарного случайного процесса находится по формуле спектральной плотности мощности детерминированного сигнала:

$$G_1(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_1(j\omega)|^2}{T}, \quad (5.17)$$

где $S_1(j\omega)$ — спектральная плотность отрезка входного стационарного случайного процесса $\xi_1(t)$ в интервале T .

Спектральная плотность мощности выходного случайного стационарного процесса

$$G_2(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_1(j\omega)K(j\omega)|^2}{T} = G_1(\omega)|K(j\omega)|^2, \quad (5.18)$$

так как спектральная плотность выходного случайного процесса $\xi_2(t)$:

$$S_2(j\omega) = S_1(j\omega)K(j\omega).$$

Корреляционная функция случайного процесса на выходе линейного четырехполосника

$$B_2(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (5.19)$$

Если линейный четырехполосник задан импульсной характеристикой $h(t)$, то его реакция на входной случайный процесс $\xi_1(t)$ может быть вычислена с помощью интеграла Дюамеля

$$\xi_2(t) = \int_0^t h(\tau) \xi_1(t - \tau) d\tau. \quad (5.20)$$

Если входной случайный процесс является стационарным, то в этом случае при вычислении среднего значения и корреляционной функции можно пользоваться формулами (4.17), (4.19). Среднее значение

$$M\{\xi_2(t)\} = M\left\{\int_0^t h(\tau) \xi_1(t - \tau) d\tau\right\} = M\{\xi_1(t - \tau)\} \int_0^t h(\tau) d\tau. \quad (5.21)$$

Корреляционная функция

$$\begin{aligned} B_2(t_1, t_2) &= M\{\xi_2(t_1) \xi_2(t_2)\} = \\ &= \int_0^{t_1} h(\tau_1) \int_0^{t_2} h(\tau_2) M[\xi_1(t_1 - \tau_1) \xi_1(t_2 - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \int_0^{t_1} h(\tau_1) \left[\int_0^{t_2} h(\tau_2) B_1(t_2 - t_1 - \tau_2 + \tau_1) d\tau_2 \right] d\tau_1. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Как следует из формул (5.21), (5.22), при преобразовании линейным четырехполосником случайного стационарного процесса он становится нестационарным.

Признаками нестационарного случайного процесса являются: а) зависимость среднего значения от времени; б) зависимость корреляционной функции не от разности $t_2 - t_1$, а от моментов времени t_2 и t_1 .

Прохождение случайных сигналов и помех через линейные системы имеет следующие особенности.

1. Если входной случайный процесс $\xi_1(t)$ подчиняется нормальному закону, то и выходной случайный процесс $\xi_2(t)$ также подчиняется нормальному закону.

2. Случайный процесс $\xi_1(t)$, подчиняющийся любому закону распределения, при прохождении через линейный четырехполосник нормализуется, причем закон распределения случайного процесса $\xi_2(t)$ тем ближе к нормальному закону, чем меньше ширина полосы пропускания этого четырехполосника.

Пример 5.1. На входе линейной цепи (рис. 5.7) действует нормальный белый шум с нулевым средним значением и спектральной плотностью $0,5N_0$. Найти спектральную плотность мощности, корреляционную функцию $B_2(\tau)$ и дисперсию σ_2 на выходе линейной цепи.

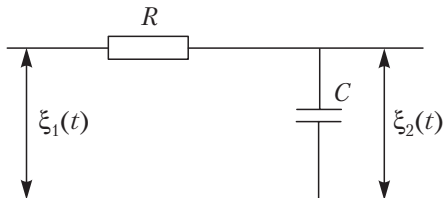


Рис. 5.7. Линейная цепь

Решение. Коэффициент передачи линейной цепи

$$K(j\omega) = \frac{\xi_2(t)}{\xi_1(t)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

Спектральная плотность на выходе вычисляется по формуле (5.18):

$$G_2(\omega) = 0,5N_0 |K(j\omega)|^2 = \frac{0,5N_0}{1 + (\omega RC)^2}.$$

Корреляционная функция случайного процесса на выходе линейной цепи определяется формулой (5.19):

$$\begin{aligned} B_2(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\omega) |K(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{4RC} e^{-\frac{|\tau|}{RC}}. \end{aligned}$$

Дисперсия

$$\sigma_2^2 = B_2(0) = N_0/(4RC).$$

5.3.3. Прохождение случайных сигналов и помех через нелинейные системы

Задача формулируется следующим образом. Для заданной многомерной плотности распределения вероятностей случайных величин на входе и заданном операторе нелинейного преобразования

найти многомерную плотность распределения вероятностей случайных величин на выходе нелинейной системы.

Если многомерная плотность будет найдена, то по ней нетрудно найти статистические характеристики (моменты n -го порядка).

Задача более наглядна и понятна для одномерного случая, когда нелинейный оператор представлен только одним уравнением $y = f(x)$, а плотность распределения вероятности входного случайного процесса $\xi_1(t)$ равна $w(x)$.

Пусть существует обратная функция $x = \varphi(y)$. Тогда, если случайная величина ξ_1 находится в пределах

$$x_0 < \xi_1 \leq x_0 + dx,$$

случайная величина ξ_2 на выходе будет находиться в пределах (рис. 5.8)

$$y_0 < \xi_2 \leq y_0 + dy.$$

Вероятности этих событий равны. Поэтому будут равны и заштрихованные площади на рис. 5.8:

$$w(x)dx = w(y)dy.$$

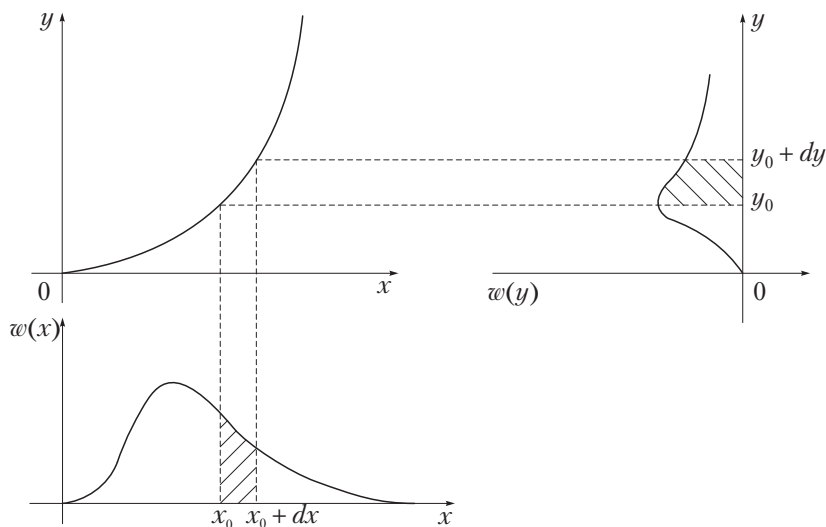


Рис. 5.8. Преобразование плотности распределения вероятности безынерционной нелинейной цепью

Из полученного равенства можно найти

$$w(y) = w(x) \frac{1}{|dy/dx|} = w[\varphi(y)] \frac{1}{|dy/dx|}. \quad (5.23)$$

Если известны оператор преобразования и двумерная плотность распределения вероятности входного случайного процесса, то статистические характеристики случайного процесса на выходе нелинейного (безынерционного) узла или блока определяются по формулам:

□ среднее значение

$$\begin{aligned} M\{\xi_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) w(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) w(x_1, t) dx_1; \end{aligned} \quad (5.24)$$

□ корреляционная функция

$$B(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) f(x_2) w(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (5.25)$$

Пример 5.2. Оператор нелинейного преобразования задан уравнениями (рис. 5.9)

$$y = x, \quad x > 0;$$

$$y = 0, \quad x \leq 0.$$

Плотность распределения случайной величины $\xi(t)$ на входе

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}.$$

Требуется найти плотность $w(y)$ распределения случайной величины на выходе нелинейной цепи (рис. 5.10).

Решение. Задача связана с прохождением случайного сигнала через диод с линейной характеристикой. Следует обратить внимание на то, что, какие бы ни были по величине отрицательные значения случайного процесса $\xi_1(t)$, значения случайного процесса $\xi_2(t)$ равны нулю (рис. 5.11). Следовательно, вероятность того, что случайная величина на выходе

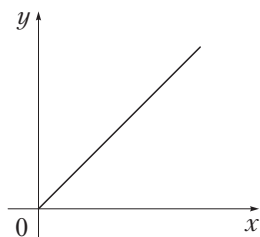


Рис. 5.9. Оператор нелинейного преобразования

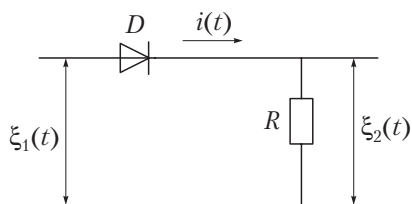


Рис. 5.10. Нелинейная цепь

цепи в некоторый момент времени t равна нулю, определяется выражением

$$P[\xi_2(t) = 0] = \int_{-\infty}^0 w(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 0,5.$$

Для положительных значений случайной величины

$$w(y) = w(x) \frac{1}{|dy/dx|} = w[\varphi(y)] \frac{1}{|dy/dx|} = w[\varphi(y)],$$

так как $dy/dx = 1$, $w[\varphi(y)] = w(y)$.

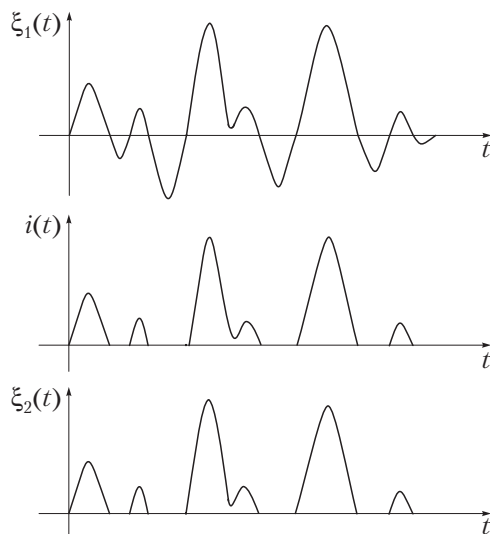


Рис. 5.11. Временные диаграммы на входе и выходе нелинейной цепи

Окончательное выражение для спектральной плотности:

$$\begin{cases} w(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2\sigma^2}, & y > 0, \\ w(y) = 0,5, & y = 0. \end{cases}$$

5.3.4. Прохождение суммы гармонического сигнала и узкополосного шума через когерентный детектор

При когерентном детектировании сигнала его спектр из области высоких переносится в область низких частот с сохранением соотношений между спектральными составляющими (когерентное синхронное детектирование и вопросы, связанные с реализацией детекторов, рассмотрены в гл. 3). Это позволяет на выходе детектора получить неискаженный низкочастотный модулирующий сигнал.

При подаче на вход когерентного детектора суммы гармонического сигнала и узкополосного шума наряду со спектральными составляющими полезного сигнала в область нижних частот будут перенесены и спектральные составляющие шума. В результате выделенный сигнал будет сопровождаться низкочастотной шумовой компонентой, разрушающей форму этого сигнала.

Проанализируем прохождение смеси сигнала и шума через когерентный детектор, полагая, что полезный сигнал является гармоническим сигналом с постоянной амплитудой, постоянной несущей частотой и постоянной начальной фазой, а помеха является узкополосным случайным процессом, квадратурные составляющие которого подчинены нормальному закону с нулевыми средними значениями и с одинаковыми дисперсиями [см. формулу (4.40)].

При прохождении через детектор смесь полезного сигнала и шума подвергается двум операциям: вначале умножению на опорное напряжение $u_{\text{оп}}(t) = B \cos \omega_0 t$, затем — линейной фильтрации ФНЧ.

При фильтрации случайный процесс нормализуется. Определим параметры нормального закона распределения: среднее значение и дисперсию.

Напряжение на входе детектора определяется гармоническим сигналом и узкополосным случайным процессом (см. § 4.5):

$$u_{\text{вх}}(t) = \eta \cos(\omega_0 t + \varphi) + A(t) \cos \omega_0 t + B(t) \sin \omega_0 t.$$

Напряжение на выходе умножителя

$$u_{\Pi}(t) = u_{\text{вх}}(t)u_{\text{оп}}(t) = 0,5B\eta \cos \varphi + 0,5B\eta \cos(2\omega_0 t + \varphi) + \\ + 0,5BA(t) + 0,5BA(t)\cos 2\omega_0 t + 0,5BB(t)\sin 2\omega_0 t.$$

Считая, что в полосу прозрачности ФНЧ попадают только низкочастотные компоненты напряжения, найдем

$$u_{\text{вых}}(t) = 0,5B\eta \cos \varphi + 0,5BA(t).$$

Первая (сигнальная) составляющая выходного напряжения определяет среднее значение одномерной плотности (рис. 5.12).

Вторая (шумовая) составляющая этого напряжения определяет дисперсию

$$M\{[u_{\text{вых}}(t) - \overline{u_{\text{вых}}(t)}]^2\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [0,5BA(t)]^2 dt = \frac{1}{4} B^2 \overline{A^2(t)}.$$

Среднее значение сигнальной составляющей определяется амплитудой полезного сигнала на входе, амплитудой опорного напряжения и фазой φ (разностью начальных фаз сигнала и опорного напряжения).

Дисперсия шумовой компоненты определяется произведением квадрата амплитуды опорного сигнала и дисперсии соответствующей компоненты узкополосного шума.

Отношение сигнал/шум на выходе часто используют в качестве меры помехоустойчивости когерентного детектора:

$$\rho_{\text{вых}} = \frac{0,25B^2\eta^2 \cos^2 \varphi}{0,25B^2 \overline{A^2(t)}} = \frac{\eta^2}{\overline{A^2(t)}} \cos^2 \varphi.$$

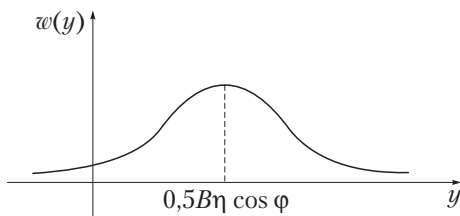


Рис. 5.12. Одномерная плотность распределения вероятности случайной величины на выходе детектора

Это отношение в $2\cos^2\varphi$ раз больше отношения сигнал/шум на входе когерентного детектора. Действительно, мощность сигнала на входе

$$P_{\text{с.вх}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt = 0,5 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta^2 dt = 0,5\eta^2.$$

Мощность шума на входе когерентного детектора

$$\begin{aligned} P_{\text{ш.вх}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [A(t)\cos\omega_0 t + B(t)\sin\omega_0 t]^2 dt = \\ &= \frac{1}{2} \overline{A^2(t)} + \frac{1}{2} \overline{B^2(t)} = \overline{A^2(t)}, \end{aligned}$$

где

$$\overline{A^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A^2(t) dt = \overline{B^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B^2(t) dt.$$

Отношение сигнал/шум на входе когерентного детектора

$$\rho_{\text{вх}} = \frac{0,5\eta^2}{\overline{A^2(t)}}.$$

5.3.5. Прохождение суммы гармонического сигнала и узкополосного шума через некогерентный детектор

Некогерентный детектор предназначен для выделения огибающей АМ сигнала с большим уровнем несущей, а также огибающей двоичного АМ сигнала.

Если детектирование не сопровождается помехой, то напряжение на выходе детектора повторяет форму модулирующего сигнала (см. п. 3.9.1, 3.9.2). При наличии помехи это напряжение пропорционально огибающей смеси сигнала и шума, которая не совпадает с формой модулирующего сигнала. Отличие тем больше, чем больше уровень помехи.

Для гармонического сигнала и узкополосного нормального шума одномерная плотность распределения этой огибающей опре-

деляется формулой (4.44). При весьма малом сигнале плотность вероятности огибающей близка к рэлеевскому закону [см. формулу (4.43)], а при увеличении амплитуды сигнала эта плотность стремится к нормальному закону.

Уровень полезного сигнала оказывает влияние и на погрешность воспроизведения модулирующего сигнала.

Кроме отношения сигнал/помеха, полезным качественным показателем является выигрыш (проигрыш) в этом отношении

$$K = \frac{\rho_{\text{вых}}}{\rho_{\text{вх}}},$$

где $\rho_{\text{вых}}$, $\rho_{\text{вх}}$ — отношение сигнал/помеха на выходе и входе соответственно.

Однако расчет выигрыша затруднен. Поэтому часто в качестве меры помехоустойчивости некогерентного детектора используют отношение

$$K_1 = \frac{M\{\eta_{\text{с+ш}}(t)\}}{M\{\eta_{\text{ш}}(t)\}},$$

где $M\{\eta_{\text{с+ш}}(t)\}$ — среднее значение напряжения на выходе некогерентного детектора, когда входное напряжение равно сумме полезного сигнала и помехи; $M\{\eta_{\text{ш}}(t)\}$ — среднее значение того же напряжения, когда входное напряжение равно напряжению только одной помехи.

Расчет коэффициента K_1 намного проще коэффициента K .

Пусть входной сигнал является гармоническим колебанием с постоянной амплитудой, а помеха — узкополосным нормальным случайным процессом с медленно меняющейся амплитудой и начальной фазой.

Среднее значение напряжения на выходе детектора прямо пропорционально первому моменту плотности распределения вероятности огибающей суммы сигнала и помехи:

$$M\{\eta_{\text{с+ш}}(t)\} = \int_0^{\infty} \alpha w(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} \alpha^2 e^{-\frac{\alpha^2 + \eta^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{\alpha\eta}{\sigma^2}\right) d\alpha.$$

Вычисление интеграла дает результат:

$$M\{\eta_{c+ш}(t)\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma e^{-\frac{\eta^2}{4\sigma^2}} \left\{ I_0\left(\frac{\eta^2}{4\sigma^2}\right) + \frac{\eta^2}{2\sigma^2} \left[I_0\left(\frac{\eta^2}{4\sigma^2}\right) + I_1\left(\frac{\eta^2}{4\sigma^2}\right) \right] \right\}, \quad (5.26)$$

где $I_0(x)$, $I_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно.

При отсутствии полезного сигнала $\eta = 0$ и из формулы (5.26) следует

$$M\{\eta_{ш}(t)\} = \sqrt{\pi/2} \sigma. \quad (5.27)$$

Используя формулы (5.26), (5.27), вычислим отношение

$$K_1 = \frac{M\{\eta_{c+ш}(t)\}}{M\{\eta_c(t)\}} = e^{-a^2/4} \left\{ I_0\left(\frac{a^2}{4}\right) + \frac{a^2}{2} \left[I_0\left(\frac{a^2}{4}\right) + I_1\left(\frac{a^2}{4}\right) \right] \right\},$$

где $a = \eta/\sigma$ — безразмерная амплитуда сигнала, равная отношению амплитуды входного сигнала к среднеквадратичному значению помехи.

На рис. 5.13 построена кривая зависимости $K_1 = f(a)$, которая дает наглядное представление о протекающих в некогерентном детекторе процессах.

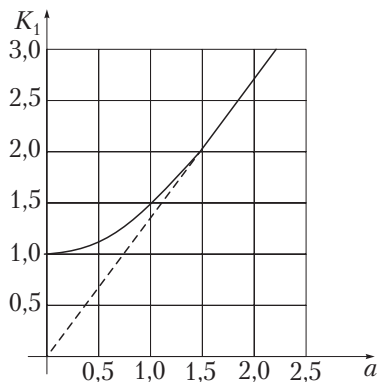


Рис. 5.13. Зависимость отношения среднего значения напряжений на выходе детектора (когда входное напряжение детектора равно сумме полезного сигнала и шума и когда входное напряжение равно напряжению одного шума) от безразмерной амплитуды входного сигнала

При малых отношениях сигнал/помеха на входе существенным приращениям аргумента (безразмерной амплитуды сигнала) соответствуют весьма малые приращения функции. Этот эффект называется *подавлением слабого сигнала помехой*. При наличии подавления отношение сигнал/помеха на выходе детектора существенно меньше отношения на его входе, а напряжение не повторяет форму модулирующего сигнала.

При больших отношениях сигнал/помеха увеличение безразмерной амплитуды сигнала приводит к увеличению коэффициента K_1 . Эффект подавления слабого сигнала помехой пропадает, а напряжение на выходе детектора с точностью до постоянной величины совпадает с модулирующим сигналом.

Контрольные вопросы

1. По каким признакам классифицируются каналы связи?
2. Что понимают под линейными и нелинейными искажениями сигналов при их передаче по каналу связи?
3. Что понимают под аддитивной помехой? В чем ее отличие от мультипликативной помехи?
4. Как математически описываются дискретный, дискретно-непрерывный и непрерывный каналы?
5. Какие основные задачи решаются при исследовании прохождения случайных процессов через канал связи и его звенья?

ТЕОРИЯ ПЕРЕДАЧИ СООБЩЕНИЙ



6.1. Общие сведения

6.1.1. Количество информации в дискретных сообщениях. Понятие энтропии

При анализе систем связи используют количественную меру, позволяющую оценивать объем информации, содержащейся в сообщении, и объем передаваемой информации.

Для определения этой количественной меры обратимся к модели дискретного канала связи (см. § 5.2). Рассмотрим случай, когда кодовые символы на входе $\{a_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, независимы, а источник определен априорными вероятностями $P(a_i)$. При отсутствии помех принятые символы $\{b_j\}$, $j = 1, 2, \dots, n$ равны передаваемым. При наличии помех любой символ на входе может перейти в любой другой символ на выходе с вероятностью перехода $P(b_j/a_i)$. Зная априорные вероятности и вероятности перехода, можно вычислить вероятность появления символа a_i при условии, что на выходе наблюдался символ b_j . Эта условная вероятность $P(a_i/b_j)$ называется *апостериорной (послеопытной) вероятностью*.

Апостериорная вероятность находится из известного равенства, определяющего совместную вероятность появления событий a_i , b_j :

$$P(a_i, b_j) = P(a_i) P(b_j/a_i) = P(b_j) P(a_i/b_j). \quad (6.1)$$

Апостериорная вероятность приема символа a_i при условии реализации символа b_j

$$P(a_i/b_j) = \frac{P(a_i)P(b_j/a_i)}{P(b_j)}. \quad (6.2)$$

Вероятность $P(a_i)$ определяется по результатам наблюдения за работой дискретного источника в прошлом и называется *априорной вероятностью*. Вероятность $P(b_j/a_i)$ определяет степень правдоподобия приема символа a_i , если был принят символ b_j . Эта вероятность называется *функцией правдоподобия* и обозначается $L(a_i)$.

Вероятность $P(b_j)$ является известной величиной и определяется из условия нормировки:

$$\sum_{i=1}^m P(a_i/b_j) = \sum_{i=1}^m kP(a_i)P(b_j/a_i) = 1,$$

где k — постоянная величина.

Следовательно, апостериорную вероятность можно записать в виде

$$P(a_i/b_j) = kP(a_i)L(a_i). \quad (6.3)$$

Рассмотрим передачу символа a_i . Вероятность его появления на входе канала определяется априорной вероятностью $P(a_i)$. Приняв символ b_j , приемник располагает дополнительными данными относительно переданного символа a_i . Его неопределенность теперь представляется новым значением вероятности $P(a_i/b_j)$. Если это значение равно значению априорной вероятности, то в результате приема каких-либо новых сведений о передаваемом символе не поступает. Если $P(a_i/b_j) > P(a_i)$, то шанс приема символа a_i возрастает и при сравнении указанных вероятностей извлекается информация об этом символе. За меру количества извлекаемой информации принимают величину

$$I(a_i, b_j) = \log \frac{P(a_i/b_j)}{P(a_i)}. \quad (6.4)$$

Основание логарифма может быть любым. Принято использовать основание два, а количество информации измерять в двоичных единицах или битах.

Пусть $P(a_i/b_j) = P(a_i)$. Тогда

$$I(a_i, b_j) = \log \frac{P(a_i)}{P(a_i)} = \log 1 = 0.$$

Как отмечалось ранее, информация, доставляемая символом b_j о символе a_i , в этом случае равна нулю.

Рассмотрим случай приема, когда принимаемый символ b_j однозначно определяет символ a_i . В этом случае $P(a_i/b_j) = 1$ и количество информации на выходе канала о символе a_i

$$I(a_i, b_j) = I(a_i) = \log \frac{1}{P(a_i)} = -\log P(a_i). \quad (6.5)$$

Величина $I(a_i)$ называется *собственной информацией* о событии (символе) a_i . Это то количество информации, которое может быть передано по каналу связи.

Собственная информация является положительной величиной. Она тем больше, чем меньше вероятность $P(a_i)$.

Перепишем выражение (6.4):

$$\begin{aligned} I(a_i, b_j) &= \log \frac{P(a_i/b_j)}{P(a_i)} = \log \frac{P(a_i/b_j)P(b_j)}{P(a_i)P(b_j)} = \\ &= \log \frac{P(a_i, b_j)}{P(a_i)P(b_j)} = \log \frac{P(b_j/a_i)}{P(b_j)}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Из равенств (6.6) следует, что информация, доставляемая символом b_j о символе a_i , равна информации, доставляемой символом a_i о символе b_j . Поэтому величина $I(a_i, b_j)$ называется *взаимной информацией*.

На практике представляет интерес *средняя взаимная информация*, равная количеству информации о множестве передаваемых символов, которая в среднем содержится во множестве принимаемых символов:

$$\begin{aligned} I(A, B) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) I(a_i, b_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log \frac{P(a_i/b_j)}{P(a_i)} = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log \frac{P(a_i, b_j)}{P(a_i)P(b_j)}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

С учетом равенств (6.1) выражение (6.7) перепишем в виде

$$\begin{aligned} I(A, B) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log P(a_i/b_j) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log P(a_i) = \\ &= I(A) - I(A/B) = H(A) - H(A/B), \end{aligned} \quad (6.8)$$

где

$$I(A/B) = -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log P(a_i/b_j) = H(A/B), \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} I(A) &= -\sum_{i=1}^m P(a_i) \log P(a_i) \sum_{j=1}^n P(b_j/a_i) = \\ &= -\sum_{i=1}^m P(a_i) \log P(a_i) = H(A), \end{aligned} \quad (6.10)$$

так как $\sum_{j=1}^n P(b_j/a_i) = 1$.

Учитывая формулу (6.1), выражение (6.7) можно записать также в виде

$$I(A, B) = I(B) - I(B/A) = H(B) - H(B/A), \quad (6.11)$$

где

$$H(B) = -\sum_{j=1}^n P(b_j) \log P(b_j), \quad (6.12)$$

$$H(B/A) = -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log P(b_j/a_i). \quad (6.13)$$

Формула (6.10) определяет среднее количество информации, которое может быть на выходе источника дискретных сообщений. Формула идентична выражению для энтропии системы в статистической механике. Поэтому величину $I(A)$ называют *энтропией* дискретного источника и обозначают $H(A)$.

Выражение $I(A/B)$, входящее в формулу (6.8), определяет среднее количество информации о символах на входе канала, полученное при приеме всевозможных символов на его выходе. Величину $I(A/B)$ называют *средней условной энтропией* и обозначают $H(A/B)$. Ее также называют *ненадежностью дискретного канала связи*.

Преобразуем выражение для средней условной энтропии:

$$I(A/B) = -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(b_j) P(a_i/b_j) \log P(a_i/b_j) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n P(b_j) \left[- \sum_{i=1}^m P(a_i/b_j) \log P(a_i/b_j) \right] = \\
&= \sum_{j=1}^n P(b_j) H(A/b_j) = H(A/B),
\end{aligned}$$

где $H(A/b_j) = - \sum_{i=1}^m P(a_i/b_j) \log P(a_i/b_j)$ — частная условная энтропия, которая характеризует информативность сообщения на входе канала после того, как стал известным всего один символ b_j на выходе дискретного канала.

Аналогично:

$$\begin{aligned}
I(B/A) &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i) P(b_j/a_i) \log P(b_j/a_i) = \\
&= \sum_{i=1}^m P(a_i) \left[- \sum_{j=1}^n P(b_j/a_i) \log P(b_j/a_i) \right] = \\
&= \sum_{i=1}^m P(a_i) H(B/a_i) = H(B/A),
\end{aligned}$$

где $H(B/a_i)$ — частная условная энтропия, которая характеризует информативность сообщения на выходе канала после того, как стал известным передаваемый символ a_i .

Рассмотрим символы на выходах двух дискретных источников сообщений. Пусть между этими символами имеется статистическая связь, определяемая совместной вероятностью $P(a_i, b_j)$. По аналогии с формулой (6.10) определим энтропию множества совместных событий, заключающихся в одновременном появлении символов a_i, b_j :

$$H(A, B) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log P(a_i, b_j). \quad (6.14)$$

Подставляя выражение (6.1) в равенство (6.14), получим

$$H(A, B) = H(A) + H(B/A) = H(B) + H(A/B), \quad (6.15)$$

где $H(B/A) = -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log P(b_j/a_i)$,

$$H(A/B) = -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(a_i, b_j) \log P(a_i/b_j). \quad (6.16)$$

Если символы статистически независимы, то $P(b_j/a_i) = P(b_j)$, $P(a_i/b_j) = P(a_i)$ и

$$H(A, B) = H(A) + H(B). \quad (6.17)$$

Основные свойства энтропии:

1. Энтропия — величина вещественная, ограниченная и неотрицательная. Это следует из формулы (6.10).

2. Энтропия равна нулю, если значение символа (сообщения) известно заранее. В этом случае вероятность одного из символов равна единице, а вероятности остальных символов равны нулю.

3. Энтропия максимальна, если все состояния дискретного источника равновероятны.

Подставляя значение вероятности $P(a_i) = 1/m$ в соотношение (6.10), получим

$$H_{\max}(A) = -\sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \log \frac{1}{m} = \log m.$$

4. Условные энтропии

$$H(A/B) \leq H(A), \quad H(B/A) \leq H(B).$$

Равенство имеет место тогда, когда символы a_i, b_j статистически независимы. В этом случае $P(b_j/a_i) = P(b_j)$, $P(a_i/b_j) = P(a_i)$ для всех индексов i, j .

5. Условная энтропия $H(A/B) = 0$, если между символами a_i, b_j наблюдается однозначная связь.

6. Энтропия (6.15) двух зависимых источников равна сумме безусловной и условной энтропий.

7. Энтропия (6.17) двух и более независимых источников равна сумме энтропий этих источников.

Учитывая приведенные свойства энтропии, проанализируем равенство (6.8). Средняя взаимная информация равна разности энтропий: энтропии дискретного источника $H(A)$ и условной

энтропии $H(A/B)$. Поскольку $H(A) \geq 0$, $H(A/B) \geq 0$, то при передаче информации по каналу связи с помехами часть информации теряется. Количественно потери определяются условной энтропией $H(A/B)$. Потери равны нулю, если $H(A/B) = 0$. В этом случае между символами на входе и выходе наблюдается однозначная связь. Наибольшие потери в канале связи возникают, если символы на входе и выходе канала статистически независимы. В этом случае выполняется равенство $H(A/B) = H(A)$, а средняя взаимная информация равна нулю.

Аналогично анализируется равенство (6.11), из которого можно найти энтропию на выходе канала связи:

$$H(B) = I(A, B) + H(B/A). \quad (6.18)$$

Следовательно, при передаче информации по каналу связи с помехами среднее количество информации на выходе канала определяется суммой средней взаимной информации и условной энтропии. Эта добавочная энтропия обусловлена только помехами. При отсутствии помех $H(B/A) = 0$, $H(B) = I(A, B)$. Кроме того, $H(A/B) = 0$ и $I(A, B) = H(A)$. Поэтому в этом случае среднее количество информации на выходе канала равно среднему количеству информации на выходе источника дискретных сообщений.

6.1.2. Производительность источника дискретных сообщений. Скорость передачи информации

Энтропия $H(A)$ дискретного источника, отнесенная к среднему времени передачи одного символа T , называется *производительностью* R_0 источника дискретных сообщений:

$$R_0 = \frac{H(A)}{T}. \quad (6.19)$$

Скорость R передачи информации равна количеству средней взаимной информации, деленному на среднее время передачи одного символа:

$$R = \frac{I(A, B)}{T} = \frac{H(A) - H(A/B)}{T} = \frac{H(B) - H(B/A)}{T}. \quad (6.20)$$

Размерность скорости передачи информации: [бит/с].

Вычислим скорость передачи информации по двоичному симметричному каналу связи (см. рис. 5.4). На вход канала поступают символы $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ с вероятностями $P(a_1)$, $P(a_2)$, причем

$$P(a_1) + P(a_2) = 1.$$

На выходе канала появляются двоичные символы $b_1 = 0$, $b_2 = 1$. Вероятность ошибки при передаче любого символа равна p . Переходные вероятности:

$$P(b_1/a_1) = 1 - p; \quad P(b_1/a_2) = p;$$

$$P(b_2/a_1) = p; \quad P(b_2/a_2) = 1 - p.$$

Вычислим энтропию

$$H(B) = -\sum_{j=1}^2 P(b_j) \log P(b_j) = -P(b_1) \log P(b_1) - P(b_2) \log P(b_2).$$

Входящие в эту формулу вероятности:

$$P(b_1) = P(a_1)P(b_1/a_1) + P(a_2)P(b_1/a_2) = P(a_1)(1 - p) + P(a_2)p;$$

$$P(b_2) = 1 - P(b_1).$$

Подставляя их в формулу для энтропии, получим

$$\begin{aligned} H(B) = & -[P(a_1)(1 - p) + P(a_2)p] \log[P(a_1)(1 - p) + P(a_2)p] - \\ & - [1 - P(a_1)(1 - p) - P(a_2)p] \log[1 - P(a_1)(1 - p) - P(a_2)p]. \end{aligned}$$

Условная энтропия

$$\begin{aligned} H(B/A) = & -\sum_{i=1}^2 P(a_i) \sum_{j=1}^2 P(b_j/a_i) \log P(b_j/a_i) = \\ = & -P(a_1)[P(b_1/a_1) \log P(b_1/a_1) + P(b_2/a_1) \log P(b_2/a_1)] - \\ & - P(a_2)[P(b_1/a_2) \log P(b_1/a_2) + P(b_2/a_2) \log P(b_2/a_2)] = \\ = & -[P(a_1) + P(a_2)][p \log p + (1 - p) \log(1 - p)] = \\ = & -[p \log p + (1 - p) \log(1 - p)]. \end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения для $H(B)$, $H(B/A)$ в формулу (6.20), получим

$$\begin{aligned} R &= I(A, B)/T = \\ &= \{-[P(a_1)(1-p) + P(a_2)p] \log[P(a_1)(1-p) + P(a_2)p] - \\ &- [1 - P(a_1)(1-p) - P(a_2)p] \log[1 - P(a_1)(1-p) - P(a_2)p] + \\ &+ p \log p + (1-p) \log(1-p)\} / T. \end{aligned} \quad (6.21)$$

6.2. Информационные характеристики источников непрерывных сообщений

6.2.1. Дифференциальная энтропия

Понятия теории информации, относящиеся к дискретным сообщениям, можно распространить и на непрерывные сообщения.

Пусть ξ — случайная величина с плотностью вероятности $w(x)$ (рис. 6.1). Она является отсчетом в некоторый момент времени случайной реализации непрерывного во времени случайного процесса. Разобьем диапазон изменения случайной величины на конечное число N малых интервалов шириной Δx . Поскольку Δx мало, вероятность того, что случайная величина находится в пределах Δx (интервала с номером i), составляет

$$p_i \left\{ x_i - \frac{\Delta x}{2} < \xi \leq x_i + \frac{\Delta x}{2} \right\} \approx w(x_i) \Delta x.$$

Формула написана при условии, что заштрихованная на рис. 6.1 площадь равна площади прямоугольника с основанием Δx и высотой $w(x_i)$.

Аналогично можно найти вероятность того, что случайная величина ξ находится в пределах любого другого интервала Δx .

Располагая рядом дискретных значений вероятностей, вычислим энтропию:

$$H_0(\xi) = - \sum_{i=1}^N p_i \log p_i = - \sum_{i=1}^N w(x_i) \Delta x \log[w(x_i) \Delta x].$$

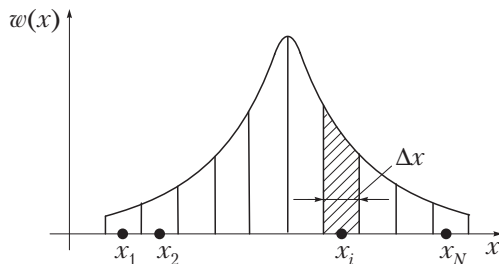


Рис. 6.1. Плотность распределения вероятности случайной величины

Уменьшая Δx , в пределе получим выражение для энтропии случайной величины:

$$\begin{aligned}
 H_1(\xi) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} H_0(\xi) = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\sum_{i=1}^N w(x_i) \Delta x \log w(x_i) \right] - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N w(x_i) \Delta x \log \Delta x = \\
 &= -\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \log w(x) dx + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log \frac{1}{\Delta x}. \quad (6.22)
 \end{aligned}$$

Первое слагаемое полученного выражения имеет конечное значение. Обозначим его $h(\xi)$:

$$h(\xi) = -\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \log w(x) dx. \quad (6.23)$$

Это выражение получило название *дифференциальной энтропии*.

Второе слагаемое при стремлении шага квантования Δx к нулю стремится к бесконечности. По этой причине $H_1(\xi)$ не может быть количественной мерой, с помощью которой можно было бы оценить объем информации, содержащейся в одном отсчете аналогового сообщения.

Определим оценку дифференциальной энтропии, считая, что шаг квантования Δx достаточно мал:

$$h^*(\xi) = -\sum_{i=1}^N w(x_i) \log w(x_i) \Delta x.$$

Запишем выражение для энтропии через эту оценку, которая будет конечной величиной и мерой информации одного квантованного отсчета:

$$\begin{aligned} H(\xi) = H_1^*(\xi) &= -\sum_{i=1}^N w(x_i) \log w(x_i) \Delta x - \log \Delta x = \\ &= h^*(\xi) - \log \Delta x. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Основные свойства дифференциальной энтропии:

1. В отличие от энтропии, дифференциальная энтропия имеет иную размерность и обладает рядом других свойств. Размерность дифференциальной энтропии: $[\log B]$. Она определяется с помощью формулы (6.23) с учетом того, что размерность одномерной плотности непрерывной случайной величины равна $[1/B]$, если этой случайной величиной является значение напряжения. Чтобы не иметь дело с логарифмами размерных величин, размерность дифференциальной энтропии можно принять равной размерности случайного процесса.

2. Дифференциальная энтропия — величина вещественная и ограниченная.

3. Дифференциальная энтропия максимальна, если ограниченный по мощности случайный процесс подчиняется нормальному закону.

4. Дифференциальная энтропия суммы независимых случайных величин равна сумме дифференциальных энтропий этих величин [см. вывод формулы (6.30)].

5. Значение дифференциальной энтропии зависит от масштаба случайной величины.

Изменим масштаб случайной величины в k раз. Если $x_1 = kx$, то в соответствии с формулой (5.23) получим $w(x_1) = w(x)/k$. Тогда

$$h(\xi_1) = -\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \log w(x) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(x)}{k} \log \frac{w(x)}{k} k dx = h(\xi) + \log k.$$

6. Оценка дифференциальной энтропии выражается логарифмической функцией.

Перепишем выражение (6.24) для энтропии:

$$H(\xi) = h^*(\xi) - \log \Delta x.$$

Размерности левой и правой частей равенства должны быть равны. Поскольку размерность левой части [бит], а составляющие правой части имеют другую размерность, то равенство размерностей возможно, если оценка дифференциальной энтропии определяется логарифмической функцией

$$h^*(\xi) = \log f(z),$$

где z — аргумент этой функции.

Подставляя последнее выражение в формулу для энтропии, убеждаемся в справедливости свойства 6:

$$H(\xi) = \log f(z) - \log \Delta x = \log[f(z)/\Delta x].$$

Из последнего равенства имеем

$$f(z) = 2^{H(\xi)} \Delta x.$$

Логарифмируя левую и правую части последнего уравнения, получим зависимость оценки дифференциальной энтропии от энтропии $H(\xi)$:

$$h^*(\xi) = \log(2^{H(\xi)} \Delta x). \quad (6.25)$$

Величина $h^*(\xi)$ называется *энтропией квантованного отсчета*.

Если интервал квантования равен $\Delta x = \Delta b$, то с учетом формулы (7.84) выражение (6.25) можно записать в виде

$$h^*(\xi) = \log(2^{H(\xi)} 2b_{\text{макс}}/L),$$

где $b_{\text{макс}}$ — максимальное значение первичного сигнала; L — число уровней квантования.

7. При стремлении интервала квантования к нулю энтропия квантованного отсчета стремится к бесконечности, а оценка дифференциальной энтропии — к дифференциальной энтропии:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} H(\xi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} h^*(\xi) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log(1/\Delta x) = h(\xi) + \infty.$$

Пример 6.1. Для нормальной случайной величины ξ с известным средним значением и известной дисперсией найти дифференциальную энтропию, а также среднее количество информации, содержащееся в одном

квантованном отсчете. Одномерная плотность распределения вероятности

$$w(x) = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2},$$

где a , σ^2 — соответственно среднее значение и дисперсия случайной величины.

Решение. Дифференциальная энтропия

$$\begin{aligned} h(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \left[\log \sqrt{2\pi\sigma^2} + \frac{\log e}{2\sigma^2} (x-a)^2 \right] dx = \\ &= \log \sqrt{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx + \frac{\log e}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 w(x) dx. \end{aligned}$$

Первый интеграл равен единице, а второй — дисперсии. Поэтому

$$h(\xi) = \log \sqrt{2\pi\sigma^2} + \frac{1}{2} \log e = \log \sqrt{2\pi e \sigma^2}. \quad (6.26)$$

Дифференциальная энтропия нормальной случайной величины не зависит от ее среднего значения и возрастает с ростом дисперсии.

Найдем среднее количество информации, содержащееся в одном квантованном отсчете. Полагая, что интервал квантования является сравнительно малой величиной, формулу (6.26) запишем в виде

$$\log \sqrt{2\pi e \sigma^2} \approx \log(2^{H(\xi)} \Delta x).$$

Следовательно,

$$\sqrt{2\pi e \sigma^2} \approx 2^{H(\xi)} \Delta x.$$

Отсюда энтропия квантованного отсчета

$$H(\xi) \approx \log[(\sigma/\Delta x)\sqrt{2\pi e}].$$

Количество информации, содержащееся в квантованном отсчете нормальной случайной величины, прямо пропорционально двоичному логарифму отношения среднеквадратичного значения этой величины к интервалу квантования. Другими словами, при одной и той же мощности первичного сигнала информативность передачи увеличивается с уменьшением интервала квантования.

6.2.2. Скорость передачи информации

Для непрерывного канала, на входе и выходе которого действуют случайные величины ξ и γ соответственно с заданной двумерной плотностью распределения вероятности $w(x, y)$, можно по аналогии с формулой (6.20) найти скорость передачи информации:

$$R = \frac{I(\xi, \gamma)}{T}, \quad (6.27)$$

где $I(\xi, \gamma)$ — средняя взаимная информация в непрерывном канале; T — время передачи информации, равное интервалу времени между двумя отсчетами входного случайного процесса.

Среднюю взаимную информацию найдем по аналогии с формулой (6.11):

$$I(\xi, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) I(x, y) dx dy,$$

где

$$I(x, y) = \log \frac{w(y/x)}{w(y)} = \log \frac{w(x/y)}{w(x)} = \log \frac{w(x, y)}{w(x)w(y)}.$$

Взаимную информацию можно выразить через дифференциальные энтропии:

$$\begin{aligned} I(\xi, \gamma) &= h(\xi) - h(\xi/\gamma), \\ I(\gamma, \xi) &= h(\gamma) - h(\gamma/\xi), \end{aligned} \quad (6.28)$$

где $h(\xi/\gamma) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) \log w(x/y) dx dy$ — условная дифференциальная энтропия случайной величины ξ при известной величине γ ; $h(\gamma/\xi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) \log w(y/x) dx dy$ — условная дифференциальная энтропия случайной величины γ при известной величине ξ .

Среднее количество информации, передаваемой по непрерывному каналу, является конечной величиной и определяется фор-

мулами (6.28). Эта информация выражается в битах, а скорость передачи информации — в битах в секунду [см. формулу (6.27)].

Подставив в формулу (6.27) выражения энтропий квантованных отсчетов, получим формулу для оценки скорости передачи в непрерывном канале:

$$\begin{aligned} R^* &= [\log(2^{H(\xi)} \Delta x) - \log(2^{H(\xi/\gamma)} \Delta x)]/T = \\ &= [\log(2^{H(\gamma)} \Delta y) - \log(2^{H(\gamma/\xi)} \Delta y)]/T, \end{aligned}$$

где $H(\xi)$, $H(\xi/\gamma)$, $H(\gamma)$, $H(\gamma/\xi)$ — энтропии квантованных отсчетов, вычисленные с помощью соответствующих плотностей распределения вероятностей; Δx , Δy — интервалы квантования на входе и выходе канала.

Если интервалы квантования равны, формулу для оценки скорости передачи в непрерывном канале можно переписать в окончательном виде:

$$R^* = [H(\xi) - H(\xi/\gamma)]/T = [H(\gamma) - H(\gamma/\xi)]/T.$$

Последняя формула может оказаться предпочтительнее формулы (6.27), если вычисление дифференциальных энтропий затруднено или невозможно. При вычислении энтропий квантованных отсчетов можно пользоваться ЭВМ и алгоритмом, который приведен выше [см. вывод формулы (6.22)]. Очевидно, что дифференциальные плотности распределения вероятностей должны быть заданы или получены экспериментально.

6.2.3. Эпсилон-энтропия

Для передачи непрерывного сообщения или сигнала с абсолютной точностью требуется бесконечно большое количество информации. Этот вывод следует из того, что энтропия, определяемая формулой (6.22), равна бесконечности. Однако передача бесконечного количества информации по реальному каналу связи с ограниченной шириной полосы и за ограниченное время не только невозможна, но и не нужна. Это объясняется тем, что для восприятия не требуется точного воспроизведения информации.

Пусть на выходе канала сигнал $b^*(t)$ отличается от сигнала на входе $b(t)$ на величину $\varepsilon(t) = b^*(t) - b(t)$. Средний квадрат этой разности

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T [b^*(t) - b(t)]^2 dt,$$

где $(0; T)$ — интервал времени, в течение которого передается сигнал.

Если средний квадрат разности не превышает некоторого заданного числа ε_0 , то сигналы $b^*(t)$ и $b(t)$ считаются *эквивалентными*. Это значит, что если послан один сигнал, а принят другой, эквивалентный ему, то по данному критерию переданный сигнал считается принятым верно.

Минимальное среднее количество взаимной информации в непрерывном канале, при котором сигналы на входе и на выходе этого канала эквивалентны, называется *эпсилон-энтропией*:

$$h_\varepsilon(b) = \min I[b(t), b^*(t)] = h[b(t)] - \max h[b(t)/b^*(t)], \quad (6.29)$$

где $h[b(t)]$ — дифференциальная энтропия сигнала, передаваемого по каналу связи в течение времени T ; $h[b(t)/b^*(t)]$ — условная дифференциальная энтропия этого сигнала.

Достижение максимума условной энтропии означает, что из всех возможных условных распределений, для которых $\overline{\varepsilon^2(t)} < \varepsilon_0$, выбирается такое распределение, которое обеспечивает максимум условной энтропии.

Вычисление эпсилон-энтропии несложно при следующих допущениях:

1) известны плотности распределения вероятности, определяющие случайные сигналы $b(t)$, $b^*(t)$. Такими плотностями являются:

□ безусловная многомерная плотность распределения вероятности сигнала $b(t)$:

$$w(\vec{x}) = w(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

□ условная многомерная плотность распределения вероятности сигнала $b(t)$:

$$w(\vec{x}/\vec{y}) = w(x_1, x_2, \dots, x_n/y_1, y_2, \dots, y_n);$$

2) выборочные значения входного сигнала являются статистически независимыми случайными величинами.

3) выборочные значения выходного сигнала являются оценками выборочных значений входного сигнала и статистически независимы;

4) спектры сигналов $b(t)$, $b^*(t)$ ограничены верхней граничной частотой F_c . Поэтому интервал дискретизации $\Delta t = 1/(2F_c)$. Число выборочных значений в интервале $[0, T]$ равно $n = T/\Delta t = 2F_c T$, а сигналы определяются формулой (2.57);

5) случайный процесс на входе непрерывного канала подчиняется нормальному закону;

6) мощность (дисперсия) разности сигналов является ограниченной величиной.

Определим дифференциальные энтропии. С учетом приведенных ограничений выражение для дифференциальной энтропии сигнала запишется по аналогии с формулой (6.23):

$$\begin{aligned} h[b(t)] &= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(\bar{x}) \log w(\bar{x}) d\bar{x} = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n w(x_i) \log \prod_{i=1}^n w(x_i) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= -2F_c T \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \log w(x) dx = 2F_c T \log \sqrt{2\pi e \sigma_b^2}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

где $w(x)$ — плотность распределения случайной величины, равной одному из выборочных значений входного сигнала; σ_b^2 — дисперсия случайной величины, равная мощности этого сигнала.

При вычислениях использованы следующие преобразования: логарифм произведения одномерных плотностей записан в виде суммы логарифмов; многомерный интеграл разбит на ряд интегралов, каждый из которых содержит два сомножителя. Первый сомножитель равен дифференциальной энтропии. Эта величина по условию определяется нормальным законом распределения и может быть найдена по формуле (6.26). Второй сомножитель равен единице. Убедимся в том, что выражение (6.30) верно:

$$- \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1) \log w(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^n w(x_i) dx_2 \dots dx_n -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{-\infty}^{\infty} w(x_2) \log w(x_2) dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1, i \neq 2}^n w(x_i) dx_1 dx_3 \dots dx_n - \\
& \dots - \int_{-\infty}^{\infty} w(x_n) \log w(x_n) dx_n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n-1} w(x_i) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} = \\
& = -2F_c T \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \log w(x) dx = 2F_c T \log \sqrt{2\pi\sigma_b^2}.
\end{aligned}$$

Условная дифференциальная энтропия

$$\begin{aligned}
h[b(t)/b^*(t)] &= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(\bar{x}, \bar{y}) \log w(\bar{x}/\bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} = \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(\bar{y}) w(\bar{x}/\bar{y}) \log w(\bar{x}/\bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}.
\end{aligned}$$

Из равенства $b(t_i) - b^*(t_i) = \varepsilon(t_i)$ следует, что неслучайные аргументы условной плотности вероятности $w(\bar{x}/\bar{y})$ определяются уравнениями $x_i - y_i = r_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Кроме того, $y_i = b^*(t_i)$,

$$w(\bar{x}/\bar{y}) = \partial F(\bar{x}/\bar{y}) / \partial \bar{x},$$

$$\begin{aligned}
F(\bar{x}/\bar{y}) &= P[b(t_1) \leq x_1, b(t_2) \leq x_2, \dots, b(t_n) \leq x_n / b^*(t_1), b^*(t_2), \dots, b^*(t_n)] = \\
&= P[b(t_1) - y_1 \leq r_1, b(t_2) - y_2 \leq r_2, \dots, b(t_n) - y_n \leq r_n] = \\
&= P[b(t_1) - b^*(t_1) \leq r_1, b(t_2) - b^*(t_2) \leq r_2, \dots, b(t_n) - b^*(t_n) \leq r_n] = \\
&= P[\varepsilon(t_1) \leq r_1, \varepsilon(t_2) \leq r_2, \dots, \varepsilon(t_n) \leq r_n] = F(\vec{r}).
\end{aligned}$$

Учитывая это, выражение для условной дифференциальной энтропии можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
h[b(t)/b^*(t)] &= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(\bar{y}) w(\vec{r}) \log w(\vec{r}) d\vec{r} d\bar{y} = \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(\vec{r}) \log w(\vec{r}) d\vec{r} = h[\varepsilon(t)].
\end{aligned}$$

Известно, что при ограниченной дисперсии случайной величины ее энтропия максимальна, если она подчиняется нормальному закону. Поэтому

$$\begin{aligned} \max h[b(t)/b^*(t)] &= \max h[\varepsilon(t)] = \\ &= \max \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n w(r_i) \log \prod_{i=1}^n w(r_i) dr_1 dr_2 \dots dr_n \right\} = \\ &= 2F_c T \log \sqrt{2\pi e \sigma_\varepsilon^2}, \end{aligned} \quad (6.31)$$

где σ_ε^2 — дисперсия, равная мощности разности сигналов $\varepsilon(t) = b^*(t) - b(t)$; $h[\varepsilon(t)]$ — дифференциальная энтропия этой разности.

Подставляя выражения (6.30), (6.31) в формулу (6.29), получим:

$$\begin{aligned} h_\varepsilon(b) &= 2F_c T [\log \sqrt{2\pi e \sigma_b^2} - \log \sqrt{2\pi e \sigma_\varepsilon^2}] = \\ &= F_c T \log \frac{\sigma_b^2}{\sigma_\varepsilon^2} = F_c T \log \rho. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Эпсилон-энтропия определяется произведением $F_c T$ и отношением сигнал/шум $\rho = \sigma_b^2 / \sigma_\varepsilon^2$.

Аналогично выражается объем сигнала через произведение $F_c T_c$ и динамический диапазон D_c (см. § 1.1).

Эпсилон-энтропия определяет производительность источника аналоговых сообщений. Для источника, на выходе которого сигнал подчиняется нормальному закону, производительность [бит/с]

$$r_0 = \frac{h_\varepsilon(b)}{T} = F_c \log \rho. \quad (6.33)$$

Такую производительность имеет дискретный источник с числом ρ равновероятных состояний и временем передачи одного символа $1/F_c$.

Пример 6.2. Определить производительность источника непрерывных сообщений для следующих исходных данных.

Плотность $w(x)$ распределения вероятности задана функцией, выражение которой не позволяет вычислить дифференциальную энтропию (6.23) с использованием табличных интегралов. Спектры сигналов ограничены верхней частотой F_c . Время передачи информации равно T . Отсчетные значения сигналов статистически независимы.

Решение. Поскольку по условию вычисление дифференциальной энтропии затруднено, применим формулу для ее оценки. Вычислим оценку эpsilon-энтропии:

$$h_{\epsilon}^*(b) = 2F_c T [h^*(b) - \max h^*(b/b^*)].$$

Из возможных распределений вероятностей только распределение, подчиняющееся нормальному закону, дает максимум условной дифференциальной энтропии. Ее оценка определяется энтропией квантованного отсчета (см. пример 6.1). Поэтому оценка эpsilon-энтропии

$$\begin{aligned} h_{\epsilon}^*(b) &= 2F_c T [\log(2^{H(b)} \Delta x) - \max \log(2^{H(b/b^*)} \Delta x)] = \\ &= 2F_c T [H(b) + \log \Delta x - H(b/b^*) - \log \Delta x] = \\ &= 2F_c T \{H(b) - \log[(\sigma_{\epsilon}/\Delta x) \sqrt{2\pi e}]\}. \end{aligned}$$

Если интервал квантования — достаточно малая величина, то производительность источника можно вычислить по формуле

$$h_{\epsilon}(b)/T \approx h_{\epsilon}^*(b)/T = 2F_c \{H(b) - \log[(\sigma_{\epsilon}/\Delta x) \sqrt{2\pi e}]\},$$

где $H(b) = -\sum_{i=1}^N w(x_i) \Delta x \log[w(x_i) \Delta x]$ — энтропия квантованного отсчета, найденная по заданной плотности $w(x)$ распределения вероятности.

Убедимся в том, что полученная формула верна. Для этого рассмотрим частный случай, когда зависимость $w(x)$ подчиняется нормальному закону. Энтропия квантованного отсчета сообщения на выходе источника в этом случае

$$H(b) = \log \sqrt{2\pi e P_b / \Delta x^2}.$$

Подставляя формулу для энтропии квантованного отсчета в формулу для производительности, получим формулу (6.33).



6.3. Пропускная способность канала связи

6.3.1. Пропускная способность дискретного канала связи

Максимальное количество передаваемой информации в единицу времени определяет пропускную способность дискретного канала связи.

При этом из всего множества дискретных источников пропускную способность определяет только такой источник, распределение

вероятностей $P(A)$ которого обеспечивает максимальное значение передаваемой информации.

Пропускная способность

$$\begin{aligned} C &= \max_{P(A)} \frac{I(A, B)}{T} = \max_{P(A)} \frac{H(A) - H(A/B)}{T} = \\ &= \max_{P(A)} \frac{H(B) - H(B/A)}{T}, \end{aligned} \quad (6.34)$$

где T — средняя длительность передачи одного символа (сообщения).

Максимум скорости передачи согласно равенству (6.34) достигается изменением вероятностей состояния источников, т.е. их перебором до тех пор, пока не будет найден источник, распределение вероятностей которого обеспечит этот максимум.

Пропускная способность канала выражается в битах в секунду [бит/с]. Она зависит от энтропии дискретного источника, т.е. от свойств передаваемого сообщения.

Пропускная способность зависит также от условных энтропий $H(A/B)$, $H(B/A)$, которые определяются характеристиками дискретного канала связи.

Пропускная способность всегда больше скорости передачи информации по каналу связи. Вычисление пропускной способности дискретного симметричного однородного канала без памяти приведено в примере 6.3.

Пример 6.3. Требуется найти пропускную способность *дискретного* симметричного и однородного канала без памяти. Переходные вероятности заданы выражениями (5.13), число кодовых символов на входе равно m .

Решение. Применим формулу (6.34). В этой формуле энтропия на выходе канала $H(B)$ зависит от распределения вероятности $P(A)$. Поэтому максимум выражения (6.34) найдем по максимуму этой энтропии. Вычислим энтропию:

$$H(B) = - \sum_{j=1}^m P(b_j) \log P(b_j),$$

где

$$P(b_j) = \sum_{i=1}^m P(a_i) P(b_j/a_i).$$

Энтропия на выходе дискретного канала максимальна, если вероятности реализации кодовых символов на входе канала одинаковы и равны $1/m$. В этом случае вероятность появления любой буквы на выходе канала

$$P(b_j) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m P(b_j/a_i) = \frac{1}{m} \left[1 - p + (m-1) \frac{p}{m-1} \right] = \frac{1}{m},$$

а максимальная энтропия

$$H_{\max}(B) = -\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \log \frac{1}{m} = \log m. \quad (6.35)$$

Вычисляя условную энтропию, убеждаемся, что она не зависит от распределения вероятности $P(A)$:

$$\begin{aligned} H(B/A) &= -\sum_{i=1}^m P(a_i) \sum_{j=1}^m P(b_j/a_i) \log P(b_j/a_i) = \\ &= -\left[\frac{p}{m-1} \log \frac{p}{m-1} + \dots + \frac{p}{m-1} \log \frac{p}{m-1} + (1-p) \log(1-p) \right] = \\ &= -\left[p \log \frac{p}{m-1} + (1-p) \log(1-p) \right]. \end{aligned}$$

Подставляя вычисленные значения для энтропии в (6.34), получим

$$C = \left[\log m + p \log \frac{p}{m-1} + (1-p) \log(1-p) \right] / T. \quad (6.36)$$

В двоичном симметричном канале $m = 2$, поэтому

$$C = [1 + p \log p + (1-p) \log(1-p)] / T. \quad (6.37)$$

6.3.2. Пропускная способность непрерывного канала связи

Пусть сигнал на выходе канала равен сумме входного сигнала и присутствующего в канале нормального шума:

$$z(t) = v(t) + N(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6.38)$$

а статистические свойства сигнала и смеси сигнала и шума описываются n -мерными плотностями вероятности:

$$w(\vec{x}) = w(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$w(\vec{y}) = w(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Если канал имеет ограниченную ширину полосы пропускания F , то смесь сигнала и шума и шум можно в соответствии с теоремой Котельникова представить их выборочными значениями. Число этих значений

$$n = T/\Delta t = 2FT.$$

Пропускная способность непрерывного канала

$$C = \frac{1}{T} \max_{w(\bar{x})} I(\bar{v}, \bar{z}), \quad (6.39)$$

где $I(\bar{v}, \bar{z})$ — средняя взаимная информация в непрерывном канале.

Максимум информации ищут по всевозможным плотностям распределения входного непрерывного сигнала $v(t)$.

Выражение (6.39) можно записать через дифференциальные энтропии:

$$C = \frac{1}{T} \max_{w(\bar{x})} [h(\bar{z}) - h(\bar{z}/\bar{v})], \quad (6.40)$$

где

$$h(\bar{z}) = - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(\bar{y}) \log w(\bar{y}) d\bar{y},$$

$$h(\bar{z}/\bar{v}) = - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(\bar{y}, \bar{x}) \log w(\bar{y}/\bar{x}) d\bar{y} d\bar{x}.$$

Условная плотность вероятности равна плотности вероятности одного шума (см. § 5.2). Следовательно,

$$C = \frac{1}{T} \max_{w(\bar{x})} [h(\bar{z}) - h(\bar{N})].$$

Если выборочные значения смеси сигнала и шума статистически независимы, то энтропию смеси сигнала и шума можно записать в виде

$$h(\bar{z}) = - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(\bar{y}) \log w(\bar{y}) d\bar{y} =$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n w(y_i) \log \prod_{i=1}^n w(y_i) dy_1 dy_2 \dots dy_n =$$

$$= -2FT \int_{-\infty}^{\infty} w(y) \log w(y) dy = 2FTh(z), \quad (6.41)$$

где $h(z)$ — энтропия выборочного значения смеси сигнала и шума. Если выборочные значения реализаций шума также статически независимы, то дифференциальную энтропию этого шума можно записать аналогично:

$$h(\bar{z}/\bar{v}) = h(\bar{N}) = 2FTh(N), \quad (6.42)$$

где $h(N)$ — энтропия выборочного значения шума.

С учетом формул (6.41), (6.42) выражение для пропускной способности канала записывается в виде

$$C = 2F \max_{w(x)} [h(z) - h(N)]. \quad (6.43)$$

Максимум стоящего в скобках выражения определяется максимальным значением энтропии $h(z)$.

Найдем максимальное значение среднего количества информации, варьируя плотностью распределения вероятности $w(x)$ выборочного значения сигнала.

Если мощности сигнала P_c и шума $P_{ш}$ ограничены, то для статистически независимых случайных величин мощность смеси сигнала и шума также будет ограниченной величиной:

$$D\{z\} = D\{v\} + D\{N\} = P_c + P_{ш}.$$

Известно, что из множества возможных плотностей распределения вероятности случайной величины с ограниченной дисперсией наибольшую энтропию имеет плотность, подчиняющаяся нормальному закону.

Известно также, что если отдельные (две и более) случайные величины распределены по нормальному закону, то их сумма также распределена по нормальному закону. Поэтому, если выборочное значение шума подчиняется нормальному закону, а выборочное значение сигнала этому закону не подчиняется, то выборочное значение смеси не будет подчиняться нормальному закону, а выражение (6.43) не достигает максимума. Только тогда, когда плотность $w(x)$ подчиняется нормальному закону, плотность смеси сигнала

и шума $w(y)$ также подчиняется нормальному закону, а энтропия $h(z)$ достигает максимума:

$$\max h(z) = \log \sqrt{2\pi e(P_c + P_{\text{ш}})}. \quad (6.44)$$

Для присутствующего в канале нормального шума дифференциальная энтропия выборки этого шума

$$h(N) = \log \sqrt{2\pi e P_{\text{ш}}}. \quad (6.45)$$

Подставляя формулы (6.44), (6.45) в формулу (6.43), получим

$$C = F \log \frac{P_c + P_{\text{ш}}}{P_{\text{ш}}} = F \log \left(1 + \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} \right). \quad (6.46)$$

Формулу (6.46) называют *формулой Шеннона*.

Пропускная способность непрерывного канала связи растет с ростом ширины полосы канала F и отношения сигнал/шум $P_c/P_{\text{ш}}$.

При малом отношении сигнал/шум формулу Шеннона можно представить в виде

$$C \approx F \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} \log e.$$

Из формулы следует, что высокая пропускная способность даже при весьма малом отношении сигнал/шум в канале может обеспечиваться увеличением ширины полосы этого канала. Эта возможность реализуется в цифровых системах связи, включая цифровые системы с шумоподобными сигналами.

Учитывая, что отношение мощности шума к ширине полосы канала определяет спектральную плотность мощности шума, пропускную способность канала можно записать также в виде

$$C \approx 1,443 \frac{P_c}{N_0}, \quad (6.47)$$

где N_0 — мощность шума, приходящаяся на единицу полосы.

Из полученной формулы следует, что пропускная способность непрерывного канала при малом отношении сигнал/шум определяется также отношением мощности сигнала к спектральной плотности мощности шума.

Контрольные вопросы

1. Какой мерой можно оценить количество информации, содержащееся в дискретном сообщении?
2. Как энтропия выражается через собственную информацию?
3. Перечислите свойства энтропии.
4. Какая связь между энтропией дискретного источника и производительностью этого источника?
5. Чем определяется скорость передачи информации по каналу связи?
6. Что такое дифференциальная энтропия? Сравните ее с энтропией дискретного источника.
7. Дайте определение эпсилон-энтропии. Как связаны между собой эпсилон-энтропия и производительность источника непрерывных сообщений?
8. Чему равны пропускные способности дискретного и непрерывного каналов связи?



ТЕОРИЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ СВЯЗИ



7.1. Оптимальный прием сигналов, известных точно. Критерии оптимального приема

Целью оптимального приема является повышение верности принимаемых сообщений. Задача приема решается выбором структуры приемника. Структура приемника, удовлетворяющая заданному критерию оптимальности, называется оптимальной, а приемник — оптимальным. Приемник анализирует принятую смесь сигнала и помехи (шума):

$$z(t) = u_i(t) + N(t), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

в течение заданного времени и принимает решение о том, какой из возможных сигналов присутствует в этой смеси. С приходом следующего сигнала анализ повторяется. В § 1.4 указано на два способа обработки смеси сигнала и шума: посимвольный прием и прием в целом.

При посимвольном приеме решаются задачи:

- 1) обнаружения сигнала;
- 2) различения (распознавания) одного из двух сигналов.

Первая задача возникает при приеме двоичного АМ сигнала (см. п. 3.4.4). При передаче информационного символа 0 сигнал на входе канала отсутствует, а при передаче 1 — присутствует. Приемник, анализируя смесь сигнала и шума в течение единичного (тактового) интервала τ_n , дает ответ: есть на входе канала сигнал или его нет, т.е. определяет переданный символ.

Вторая задача возникает при приеме двоичных ЧМ и ФМ сигналов (см. п. 3.5.4, п. 3.6.2). При передаче информационного символа 0 сигнал на входе канала равен $u_1(t)$, а при передаче символа 1 равен $u_2(t)$. Приемник, анализируя смесь сигнала и шума в течение единичного интервала $\tau_{\text{и}}$, дает ответ, какой из двух символов передан по каналу связи.

Прием в целом связан с решением задачи распознавания одного из множества $m > 2$ сигналов. Приемник, анализируя смесь сигнала и шума в течение времени $T > \tau_{\text{и}}$, дает ответ, какой из m сигналов присутствует в смеси, и в соответствии с кодовой таблицей определяет переданное по каналу двоичное слово блока (см. п. 3.5.4, 3.6.3, 3.7.3).

Впервые задача оптимального приема была поставлена и решена в 1946 г. выдающимся русским ученым В.А. Котельниковым.

Рассмотрим задачу посимвольного приема двоичных (бинарных) сигналов на фоне нормального белого шума. Форма сигналов известна точно, т.е. задана детерминированными функциями времени $u_i(t)$, $i = 1, 2$. Сигналы имеют одинаковую длительность $\tau_{\text{и}}$, равную длительности единичного интервала, причем границы этого интервала известны заранее. Выполнение последнего условия обеспечивается с помощью устройств тактовой синхронизации.

Информационные символы изменяются в соответствии с передаваемой информацией и поэтому до обработки на приемном конце неизвестны.

Для исследования оптимального приема воспользуемся моделью дискретно-непрерывного канала. На его входе присутствуют двоичные символы 0, 1 (буквы a_1, a_2), которым соответствуют известные формы сигналов с априорными вероятностями, равными соответственно $P[u_1(t)]$, $P[u_2(t)]$, причем их сумма равна 1.

На выходе канала смесь сигнала и шума является непрерывной реализацией случайного процесса. Полагая, что спектр смеси ограничен верхней граничной частотой $F_{\text{в}}$, представим эту реализацию выборочными значениями $z(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, которые следуют через равные интервалы времени $\Delta t = 1/(2F_{\text{в}})$. Число выборочных значений в интервале наблюдения смеси равно

$$n = \tau_{\text{и}}/\Delta t = 2F_{\text{в}}\tau_{\text{и}}.$$

Случайный процесс $z(t)$ считается заданным, если задана его n -мерная плотность вероятности:

$$w(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{\partial^n F(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_n}, \quad (7.1)$$

где $F(y_1, y_2, \dots, y_n) = P[z(t_1) \leq y_1, z(t_2) \leq y_2, \dots, z(t_n) \leq y_n]$.

Здесь $F(y_1, y_2, \dots, y_n)$ — интегральная функция распределения; P — соответствующая вероятность.

Зная n -мерную плотность, можно вычислить вероятность реализации смеси сигнала и шума

$$\begin{aligned} P(b_j) &= \int \dots \int \omega(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 dy_2 \dots dy_n \approx \\ &\approx \omega(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 dy_2 \dots dy_n = \omega(\vec{y}) d\vec{y}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — n -мерный неслучайный вектор, определенный совокупностью значений неслучайных аргументов; $d\vec{y} = dy_1 dy_2 \dots dy_n$ — бесконечно малая область n -мерного пространства (интегрирование производится по этой бесконечно малой области).

Выделим некоторую ограниченную область n -мерного пространства, полагая, что исследуемые случайные векторы не выходят за ее границы. Кроме того, появление конкретного вектора свяжем с появлением на выходе дискретно-непрерывного канала некоторой буквы b_j из бесконечного множества подобных букв. Это событие зависимо и совместно с другим событием, которое заключается в присутствии на входе канала одной из двух букв [сигналов $u_i(t)$, $i = 1, 2$]. Математическое описание событий a_i и b_j исчерпывается совместной вероятностью

$$P(a_i, b_j) = P(a_i)P(b_j/a_i) = P(b_j)P(a_i/b_j), \quad (7.3)$$

где $P(b_j)$ — вероятность реализации смеси $z(t)$ в интервале $(0, \tau_n)$; $P(a_i)$ — априорная вероятность сигнала; $P(a_i/b_j)$ — условная вероятность, равная апостериорной вероятности сигнала; $P(b_j/a_i)$ — функция правдоподобия.

Из формулы (7.3) найдем выражение для апостериорной вероятности:

$$P(a_i/b_j) = \frac{P(a_i)P(b_j/a_i)}{P(b_j)}. \quad (7.4)$$

Вероятность $P(b_j/a_i)$ может быть найдена по n -мерной условной плотности вероятности:

$$P(b_j/a_i) = \int \dots \int_{d\vec{y}} w[y_1, y_2, \dots, y_n/u_i(t)] dy_1 dy_2 \dots dy_n \approx w[\vec{y}/u_i(t)] d\vec{y}. \quad (7.5)$$

Эта плотность

$$w[y_1, y_2, \dots, y_n/u_i(t)] = \frac{\partial^n F[y_1, y_2, \dots, y_n/u_i(t)]}{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_n}, \quad (7.6)$$

где

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n/u_i(t)) = P[z(t_1) \leq y_1, z(t_2) \leq y_2, \dots, z(t_n) \leq y_n/u_i(t)].$$

В п. 5.2.2 показано, что функция правдоподобия (7.6) равна n -мерной плотности распределения вероятности шума. Там же приведено и выражение для функции правдоподобия. Безусловная (7.1) и условная (7.6) n -мерная плотности распределения вероятностей существенно различаются: если ансамбль реализаций $z(t)$, определяющих первую плотность, включает реализации, связанные как с первым, так и со вторым сигналом, то ансамбль второй плотности включает только реализации, связанные или с первым, или со вторым сигналом.

В п. 6.1.1 рассмотрена передача символов по дискретному каналу связи с помехами и определена мера количества извлекаемой информации. Эта мера определяется равенством (6.4).

По аналогии можно определить количество информации, передаваемой по дискретно-непрерывному каналу:

$$\log \frac{P(a_1/b_j)}{P(a_1)},$$

если на его входе присутствует символ a_1 , и

$$\log \frac{P(a_2/b_j)}{P(a_2)},$$

если на входе присутствует символ a_2 .

Разность этого количества информации:

$$\Delta I = \log \frac{P(a_1/b_j)}{P(a_1)} - \log \frac{P(a_2/b_j)}{P(a_2)} = \log \frac{P(a_1/b_j)P(a_2)}{P(a_2/b_j)P(a_1)}. \quad (7.7)$$

Подставляя в формулу (7.7) формулу (7.4), получим

$$\Delta I = \log \frac{P(b_j/a_1)}{P(b_j/a_2)}. \quad (7.8)$$

Выразим значение вероятностей через условные плотности распределения вероятности по формуле (7.5). В результате получим

$$\Delta I = \log \frac{w[\bar{y}/u_1(t)]}{w[\bar{y}/u_2(t)]} = \log \Lambda, \quad (7.9)$$

где $\Lambda = w[\bar{y}/u_1(t)]/w[\bar{y}/u_2(t)]$ — отношение апостериорных (последопытных), условных плотностей вероятности. Оно определяет правдоподобие гипотез о передаче сигналов $u_i(t)$, $i = 1, 2$.

Если выполняется неравенство

$$\log \Lambda > 0, \quad (7.10)$$

то наиболее вероятно, что был передан сигнал $u_1(t)$, а если не выполняется, то наиболее вероятно, что был передан сигнал $u_2(t)$.

Правило (7.10) принятия решения называется *информационным критерием оптимальности приемника*.

Другим критерием оптимальности является следующее неравенство:

$$\begin{aligned} P(a_1/b_j) &= P[u_1(t)] \frac{w[\bar{y}/u_1(t)]d\bar{y}}{w(\bar{y})d\bar{y}} > P(a_2/b_j) = \\ &= P[u_2(t)] \frac{w[\bar{y}/u_2(t)]d\bar{y}}{w(\bar{y})d\bar{y}}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Оно получено вычислением апостериорных вероятностей по формулам (7.2), (7.4) и (7.5) и сравнением их между собой. Критерий (7.11) называется *критерием максимальной обратной вероятности*.

Если неравенство (7.11) выполняется, то принимается решение, что принят сигнал $u_1(t)$. В противном случае принимается решение, что принят сигнал $u_2(t)$.

Соотношение (7.11) можно записать также в виде

$$\Lambda = \frac{w[\bar{y}/u_1(t)]}{w[\bar{y}/u_2(t)]} > \frac{P[u_2(t)]}{P[u_1(t)]}. \quad (7.12)$$

Полученный критерий называется *критерием максимума отношения правдоподобия*. Если априорные вероятности равны, то $\Lambda > 1$. Логарифмируя это неравенство, получим: $\log \Lambda > 0$, т.е. информационный критерий. Из этого следует, что принятие решения о возможных принимаемых сигналах на основе информационного критерия основано на сравнении количества информации, извлекаемой из смеси сигнала и шума об этих сигналах. Если при приеме учитываются и априорные вероятности сигналов, то этот прием реализуется на основе критерия максимума отношения правдоподобия, а если нет, то на основе информационного критерия.

При приеме одного из множества m сигналов ($m > 2$) оптимальный приемник вычисляет апостериорные вероятности, а затем принимает решение. Правило принятия решения записывается в виде

$$P[u_i(t)] \frac{w[\bar{y}/u_i(t)]}{w(\bar{y})} > P[u_j(t)] \frac{w[\bar{y}/u_j(t)]}{w(\bar{y})}, \quad (7.13)$$

где $P[u_i(t)]$, $P[u_j(t)]$ — априорные вероятности i -го и j -го сигналов; $w[\bar{y}/u_i(t)]$, $w[\bar{y}/u_j(t)]$ — функции правдоподобия i -го и j -го сигналов, причем сумма всех априорных вероятностей сигналов равна 1.

Вычисленные апостериорные вероятности попарно сравниваются между собой и после этой операции те вероятности, которые оказались больше, вновь попарно сравниваются между собой и т.д. Найденная по этому правилу наибольшая апостериорная вероятность определяет принимаемый сигнал.

Правило (7.13) можно записать иначе через отношение правдоподобия двух гипотез о передаче сигналов:

$$\Lambda_{i,j} = \frac{w[\bar{y}/u_i(t)]}{w[\bar{y}/u_j(t)]} > \frac{P[u_j(t)]}{P[u_i(t)]}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (7.14)$$

Все приведенные выше критерии оптимальности записаны в виде неравенств, которые позволяют определить в смеси сигнала и шума наиболее вероятный сигнал из заданного множества сигналов.

Другими используемыми критериями являются: критерий минимума среднего риска, весовой критерий, критерий Неймана — Пирсона. Поскольку в теории связи преимущественно применяют критерий максимума отношения правдоподобия, мы в дальнейшем будем использовать этот критерий.

Алгоритм работы приемника, работающего в соответствии с этим критерием, заключается в вычислении отношения правдоподобия на основе анализа смеси сигнала и шума и принятия решения о том, какой сигнал присутствует на входе. По этому сигналу определяется или *оценка слова* блока информационной последовательности, или оценка символа этой последовательности. (Оценка в тексте и на рисунках обозначена звездочкой.)

7.2. Синтез оптимальных приемников дискретных сигналов, известных точно

7.2.1. Реализация оптимального приема на базе коррелятора

Под **синтезом** оптимального приемника понимают отыскание его структуры. Задача синтеза формулируется следующим образом: найти структуру приемника, которая удовлетворяет исходным условиям и ограничениям и при этом обеспечивает совокупность показателей качества, наилучших в смысле заданного критерия оптимальности.

Возможными вариантами синтеза являются инженерный и математический.

Инженерный синтез использует математические методы исследования, включающие расчеты на ЭВМ и математическое моделирование; экспериментальные исследования; накопленный опыт по проектированию.

Математический синтез заключается в математической формулировке совокупности исходных данных и критерия оптимальности, а также в отыскании чисто математическим путем структуры приемника.

Рассмотрим задачу математического синтеза оптимального приемника для приема сигнала, известного точно.

Исходными данными являются:

- а) вид зависимости сигнала $u_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$, от его параметров и времени;
- б) вид смеси сигнала и помехи;
- в) вид канала связи;
- г) время анализа смеси сигнала и помехи.

Сигнал является детерминированной функцией времени и его параметров (амплитуды, частоты и начальной фазы). Начало и окончание сигнала заранее известны и совпадают с началом и окончанием анализа смеси сигнала и шума. Выполнение последнего условия обеспечивается устройствами синхронизации.

Помеха является нормальным белым шумом со спектральной плотностью N_0 . Канал связи является дискретно-непрерывным. Время анализа смеси сигнала и шума равно или времени передачи одного информационного символа (длительности единичного интервала τ_u), или времени передачи T множества символов.

В качестве критерия оптимальности выберем критерий максимума отношения правдоподобия, записанный в виде неравенств (7.14).

Используя формулу (5.16), неравенства (7.14) запишем в виде

$$\Lambda_{i,j} = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - u_i(t)]^2 dt\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - u_j(t)]^2 dt\right\}} > \frac{p[u_j(t)]}{p[u_i(t)]}, \quad (7.15)$$

$$i \neq j, \quad i, j \in \{1, 2, 3, \dots, m\}.$$

Логарифмируя по основанию e левую и правую части неравенства (7.15), получим следующее выражение:

$$\int_0^T [z(t) - u_j(t)]^2 dt - N_0 \ln p[u_j(t)] > \int_0^T [z(t) - u_i(t)]^2 dt - N_0 \ln p[u_i(t)].$$

Раскрывая скобки и сокращая в обеих частях неравенства одинаковые слагаемые, получим следующий алгоритм приема:

$$\begin{aligned} & \int_0^T z(t)u_i(t)dt - 0,5E_i + 0,5N_0 \ln p[u_i(t)] > \\ & > \int_0^T z(t)u_j(t)dt - 0,5E_j + 0,5N_0 \ln p[u_j(t)], \\ & i \neq j, \quad i, j \in \{1, 2, 3, \dots, m\}, \end{aligned} \quad (7.16)$$

где E — энергия принимаемого сигнала.

Если все сигналы равновероятны и имеют одинаковые энергии, то неравенство (7.16) упрощается:

$$\int_0^T z(t)u_i(t)dt > \int_0^T z(t)u_j(t)dt, \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, 2, 3, \dots, m\}. \quad (7.17)$$

Структурная схема оптимального приемника, определяемая выражениями (7.17), используется для решения задачи распознавания при приеме дискретных сигналов (ЧМ сигнала, модулированного по форме ШС), а также посылок сигнала с многократной ОФМ.

Для сигнала с многократной ОФМ структурная схема, приведенная на рис. 7.1, дополняется запоминающим устройством и вычитающим устройством. Структурная схема оптимального приемника сигнала с многократной ОФМ изображена на рис. 3.74. Описание ее работы приведено в п. 3.6.3.

Рассмотрим работу оптимального приемника, структурная схема которого приведена на рис. 7.1. Каждый канал оптимального приемника содержит умножитель и интегратор. Устройство, содержащее умножитель и интегратор, называется **коррелятором**. Приемник, построенный на корреляторах, называется **корреляционным приемником**. Напряжения, полученные на выходах каналов, сравниваются между собой в решающем устройстве в конце интервала приема смеси сигнала и шума. По каналу с наибольшим откликом определяется сигнал, присутствующий на входе в смеси с шумом и совпадающий с опорным сигналом этого коррелятора. По найденному сигналу находится соответствующая ему оценка двоичного

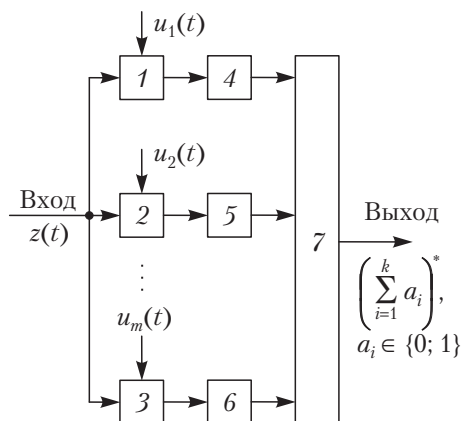


Рис. 7.1. Структурная схема оптимального приемника (демодулятора) m сигналов, известных точно:

1, 2, 3 — умножители; 4, 5, 6 — интеграторы; 7 — решающее устройство

слова блока длиной k символов передаваемой информационной последовательности.

Для двоичной системы ($m = 2$) неравенство (7.16) записывается в виде

$$\int_0^{\tau_n} z(t) u_{\Delta}(t) dt > \lambda =$$

$$= 0,5(E_1 - E_2) + 0,5N_0 \{\ln p[u_2(t)]/p[u_1(t)]\}, \quad (7.18)$$

где $u_{\Delta}(t) = u_1(t) - u_2(t)$ — разность сигналов; λ — пороговый уровень; τ_n — время анализа смеси сигнала и шума.

Структурная схема оптимального приемника для приема двоичного сигнала показана на рис. 7.2.

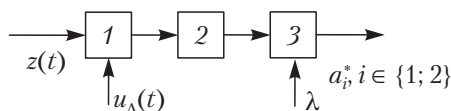


Рис. 7.2. Структурная схема оптимального приемника двоичных сигналов:

1 — умножитель; 2 — интегратор; 3 — решающее устройство

7.2.2. Бинарное обнаружение сигналов

Бинарное обнаружение реализуется при приеме модулированных по амплитуде носителей сообщения: постоянного тока, гармонического сигнала, ШС и т.д. Модулирующий двоичный сигнал является функцией непрерывного времени. Он равен или нулю, или заданному некоторой функцией импульсу в пределах каждого единичного или тактового интервала в соответствии с передаваемыми информационными символами 0 или 1 (см. п. 3.4.1).

Рассмотрим примеры бинарного обнаружения.

При приеме двоичного видеосигнала, полученного в передатчике модуляцией постоянного тока информационными посылками по амплитуде, этот сигнал равен постоянной величине $[u_1(t) = a]$ или нулю $[u_2(t) = 0]$ в течение тактового интервала τ_n . Энергии этих сигналов соответственно равны:

$$E_1 = \int_0^{\tau_n} u_1^2(t) dt = a^2 \tau_n, \quad E_2 = 0.$$

Неравенство (7.18), определяющее структуру обнаружителя, записывается в виде

$$a \int_0^{\tau_n} z(t) dt > \lambda, \quad (7.19)$$

где $\lambda = a^2 \tau_n / 2 + 0,5 N_0 \{ \ln p[u_2(t)] - \ln p[u_1(t)] \}$.

Структура оптимального приемника, построенного в соответствии с неравенством (7.19), состоит из интегратора и решающего устройства, в котором вычисленное значение интеграла сравнивается с пороговым уровнем.

При приеме двоичного АМ радиосигнала, полученного в передатчике модуляцией гармонического сигнала информационными посылками по амплитуде, имеем

$$E_1 = a^2 \int_0^{\tau_n} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt = a^2 \tau_n / 2; \quad E_2 = 0;$$

$$\lambda = a^2 \tau_n / 4 + 0,5 N_0 \{ \ln p[u_2(t)] - \ln p[u_1(t)] \}.$$

Следовательно, пороговый уровень λ определяется энергией сигнала, спектральной плотностью мощности шума и априорными вероятностями передаваемых сигналов. Цифровые информационные потоки отличаются непостоянством этих вероятностей, что создает определенные трудности реализации оптимальных структур. В ряде систем передачи равенство априорных вероятностей обеспечивается использованием специального преобразования (скремблирования) двоичного информационного потока в передатчике. Операция скремблирования связана с посимвольным суммированием по модулю два элементов двоичного информационного потока с элементами двоичной псевдослучайной последовательности. В результате суммарный цифровой поток будет содержать равновероятные символы, а пороговый уровень в оптимальном приемнике будет определяться только энергией сигнала. В приемнике после приема и обработки суммарного цифрового потока производится восстановление исходного двоичного информационного потока с использованием операции, обратной скремблированию.

Структурная схема оптимального приемника двоичных АМ радиосигналов приведена на рис. 7.3. Временные диаграммы, поясняющие работу когерентного приемника, приведены на рис. 7.4.

В состав схемы входит коррелятор, содержащий умножитель и интегратор, а также устройство, осуществляющее отсчет значения напряжения на выходе интегратора (дискретизатор), и решающее устройство. Опорный и принимаемый сигналы умножаются в умножителе, а результат интегрируется.

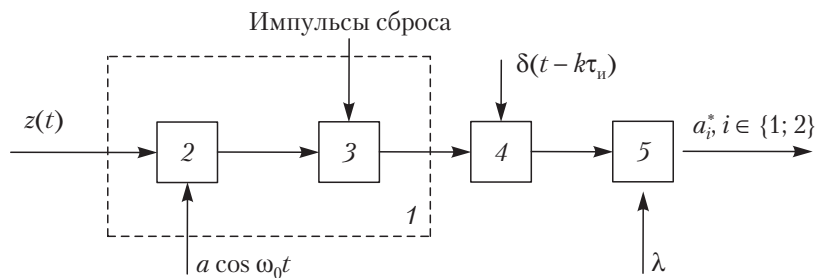


Рис. 7.3. Структурная схема оптимального когерентного приемника:
 1 — коррелятор; 2 — умножитель; 3 — интегратор; 4 — дискретизатор;
 5 — решающее устройство

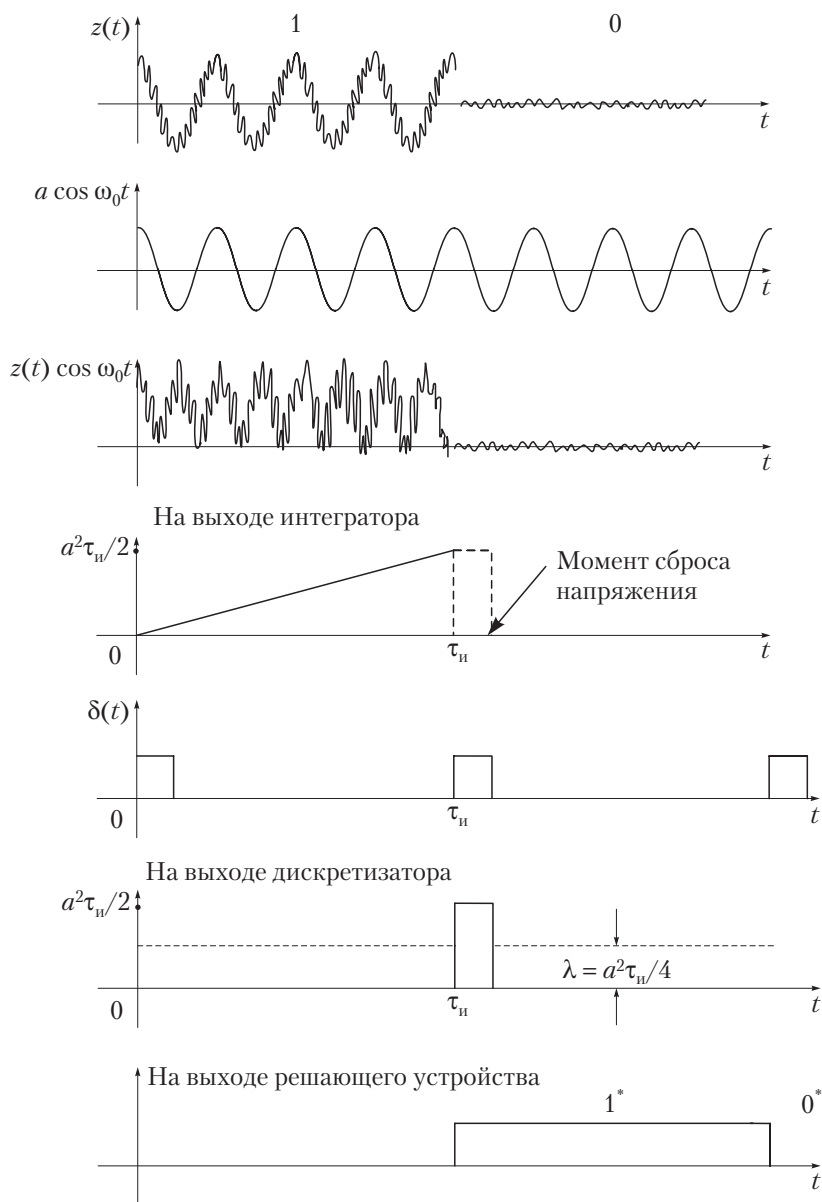


Рис. 7.4. Временные диаграммы, поясняющие работу приемника АМ сигналов

Вырабатываемый в приемнике опорный гармонический сигнал является непрерывным колебанием, а его амплитуда, фаза и частота с заданной степенью точности совпадают с аналогичными параметрами принимаемого сигнала. Напомним, что приемник, работа которого основывается на знании фазы и частоты несущей принимаемого сигнала, называется когерентным приемником.

Интегрирование в интеграторе ограничено значением времени, равным $\tau_{\text{и}}$, причем, поскольку неравенство, определяющее обработку сигнала, известного точно, содержит определенный интеграл, то промежуточные значения выходного напряжения интегратора при дальнейшей обработке не используются. В схеме на рис. 7.3 значение выходного напряжения интегратора в момент времени $\tau_{\text{и}}$ реализуется на выходе дискретизатора (управляемого ключа), а затем оно сравнивается с пороговым уровнем в решающем устройстве. После этого за короткий промежуток времени производится сброс накопленного интегратором напряжения для того, чтобы устранить связь между результатами приема в соседних единичных интервалах.

Если напряжение на выходе интегратора больше порогового уровня, то решающее устройство вырабатывает единичный символ, реализуемый в виде прямоугольного видеопульса, а если меньше — то нулевой.

Бинарное обнаружение модулированных по амплитуде ШС реализуется по аналогичному алгоритму. Структурные схемы оптимальных обнаружителей в этих случаях содержат блоки, которые приведены на рис. 7.2, 7.3. При приеме шумоподобного видеосигнала на второй вход умножителя в схеме на рис. 7.2 поступает ШС, а при приеме шумоподобного радиосигнала в схеме на рис. 7.3 — шумоподобный радиосигнал. Пороговые уровни в решающих устройствах соответствуют пороговым уровням, которые приведены выше.

Сигнал на выходах интеграторов в анализируемых схемах равен сумме двух составляющих. Первая (сигнальная) составляющая определяется выражением

$$\int_0^{\tau_{\text{и}}} u(t)u(t)dt.$$

Вторая (шумовая) составляющая определяется выражением

$$\int_0^{\tau_{\text{ш}}} N(t)u(t)dt.$$

Значение сигнальной составляющей равно энергии сигнала, а среднее значение шумовой составляющей

$$M \left\{ \int_0^{\tau_{\text{ш}}} N(t)u(t)dt \right\} = \int_0^{\tau_{\text{ш}}} M\{N(t)\}u(t)dt = 0,$$

так как среднее значение шума равно нулю.

Для нормального белого шума дисперсия шумовой составляющей равна $0,5N_0E_1$ (см. п. 7.8.1). Отношение значения сигнальной составляющей к среднеквадратичному значению шума равно

$$E_1/\sqrt{0,5N_0E_1} = \sqrt{2E_1/N_0} = \sqrt{2}h.$$

Корень квадратный от отношения энергии сигнала к спектральной плотности мощности шума называется *параметром обнаружения*:

$$h = \sqrt{E_1/N_0}.$$

Пример 7.1. Вычислить параметр обнаружения и выигрыш в помехоустойчивости: а) при приеме двоичного видеосигнала; б) при приеме двоичного радиосигнала; в) при приеме модулированного по амплитуде ШС. Мощность шума на входе обнаружителя одинакова для всех случаев приема.

Решение. Энергия двоичного видеосигнала и спектральная плотность мощности шума соответственно равны:

$$E_1 = \int_0^{\tau_{\text{ш}}} u_1^2(t)dt = a^2\tau_{\text{ш}}, \quad N_0 = P_{\text{ш}}\tau_{\text{ш}}.$$

Параметр обнаружения

$$h = \sqrt{a^2\tau_{\text{ш}}/(P_{\text{ш}}\tau_{\text{ш}})} = \sqrt{a^2/P_{\text{ш}}} = a/\sigma = \rho_{\text{вх}},$$

где a — амплитуда видеосигнала; $\tau_{\text{ш}}$ — длительность видеосигнала; σ — среднеквадратичное значение шума; $\rho_{\text{вх}}$ — отношение сигнал/шум на входе обнаружителя.

Отношение сигнальной составляющей к среднеквадратичному значению шума на выходе интегратора

$$\rho_{\text{вых}} = E_1 / \sqrt{0,5N_0 E_1} = \sqrt{2a^2 \tau_{\text{ш}} / (P_{\text{ш}} \tau_{\text{ш}})} = \sqrt{2}a / \sigma = \sqrt{2}\rho_{\text{вх}}.$$

Отношение

$$\rho_{\text{вых}} / \rho_{\text{вх}} = \sqrt{2} = g$$

характеризует выигрыш в помехоустойчивости для этого случая приема.

При приеме двоичного радиосигнала энергия

$$E_1 = a^2 \int_0^{\tau_{\text{ш}}} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt = \frac{a^2 \tau_{\text{ш}}}{2}$$

в 2 раза меньше энергии двоичного видеосигнала. Спектральная плотность мощности шума

$$N_0 = \frac{P_{\text{ш}} \tau_{\text{ш}}}{2}$$

также в 2 раза меньше, так как ширина спектра радиосигнала в 2 раза больше. Поэтому параметр обнаружения радиосигнала и выигрыш в помехоустойчивости остаются теми же, что и при приеме видеосигнала.

Энергия шумоподобного видеосигнала зависит от способа формирования сигнала в передатчике. Модуляцией постоянного тока по амплитуде формируется сигнал с пассивной паузой, энергия которого

$$E_1 = \int_0^{\tau_{\text{ш}}} u_1^2(t) dt = m a^2 \tau_0,$$

где m — число символов (единиц) в одном периоде $\tau_{\text{ш}}$ этого сигнала; τ_0 — длительность одного символа.

Модуляцией постоянного тока по знаку (фазе) формируется сигнал с активной паузой, энергия которого

$$E_1 = \int_0^{\tau_{\text{ш}}} u_1^2(t) dt = N a^2 \tau_0,$$

где N — число символов (единиц и нулей) в одном периоде этого сигнала.

Спектральные плотности мощности шума в этих случаях приема одинаковы и равны $N_0 = P_{\text{ш}} \tau_0$. Параметры обнаружения сигналов с пассивной и активной паузой соответственно равны

$$h = \sqrt{\frac{m a^2 \tau_0}{P_{\text{ш}} \tau_0}} = \sqrt{\frac{m a^2}{P_{\text{ш}}}} = \frac{a \sqrt{m}}{\sigma}, \quad h = \sqrt{\frac{a^2 \tau_{\text{ш}}}{P_{\text{ш}} \tau_0}} = \frac{a \sqrt{N}}{\sigma}.$$

Выигрыш в помехоустойчивости для сигнала, полученного модуляцией постоянного тока по амплитуде, и для сигнала, полученного модуляцией постоянного тока по знаку, соответственно равен $g = \rho_{\text{вых}}/\rho_{\text{вх}} = \sqrt{2m}$ и $g = \rho_{\text{вых}}/\rho_{\text{вх}} = \sqrt{2N}$. Как правило, $m \leq N$, поэтому прием сигналов с активной паузой предпочтительнее приема сигналов с пассивной паузой.

При приеме шумоподобных радиосигналов параметры обнаружения, отношения сигнальных составляющих к среднеквадратичному значению шума и выигрыш остаются такими же, что и при приеме соответствующих шумоподобных видеосигналов.

Анализ полученных расчетов показывает, что корреляционный прием приводит к улучшению отношения сигнал/шум. В случае обнаружения импульсов выигрыш равен $\sqrt{2}$, в случае обнаружения ШС с пассивной паузой выигрыш равен $\sqrt{2m}$, а в случае обнаружения шумоподобных сигналов с активной паузой можно получить выигрыш, равный $\sqrt{2N}$.

7.2.3. Бинарное распознавание сигналов

Бинарное распознавание реализуется при приеме модулированных по знаку (фазе) носителей сообщения: постоянного тока, гармонического сигнала, ШС и т.д. Модулирующий двоичный сигнал является функцией непрерывного времени, которая может менять знак в пределах тактового интервала в соответствии с передаваемыми информационными символами 0 или 1. Если символ равен 0, знак функции — «плюс», а если символ равен 1, то знак функции — «минус».

Если при обнаружении устанавливается присутствие или отсутствие сигнала в смеси сигнала и шума, то при распознавании дается ответ, какой из двух сигналов, связанных с передаваемыми информационными символами, содержится в этой смеси.

По виду сигналов бинарное распознавание делится на распознавание противоположных и на распознавание ортогональных сигналов. К *противоположным* сигналам относятся сигналы, удовлетворяющие условию

$$u_2(t) = -u_1(t).$$

К *ортогональным* сигналам относятся сигналы, удовлетворяющие условию

$$\int_0^{\tau_{\text{н}}} u_1(t)u_2(t)dt = 0,$$

где $\tau_{\text{н}}$ — интервал существования сигналов.

Условию противоположности удовлетворяют все известные ограниченные во времени сигналы, а условию ортогональности — достаточно широкий класс из этих сигналов.

В системах связи применяются следующие противоположные сигналы: положительный и отрицательный видеоимпульсы одинаковой амплитуды и длительности; радиоимпульсы с одинаковыми амплитудами, частотами и длительностями, но с отличающимися на 180° начальными фазами; отличающиеся по знаку ШС с одинаковыми формами, амплитудами и т.д. Этот перечень может быть продолжен.

К числу используемых ортогональных сигналов относятся: два радиоимпульса с одинаковыми амплитудами и длительностями, но с разными частотами; пары последовательностей Уолша с одинаковым периодом; пары других последовательностей.

Структура оптимального приемника при решении задачи бинарного распознавания определяется следующим неравенством, которое получено преобразованием неравенства (7.16):

$$\int_0^{\tau_{\text{н}}} z(t)u_{\Delta}(t)dt > \lambda = 0,5(E_1 - E_2) + 0,5N_0\{\ln p[u_2(t)]/p[u_1(t)]\}, \quad (7.20)$$

где $u_{\Delta}(t) = u_1(t) - u_2(t)$ — разность сигналов; λ — пороговый уровень.

Для противоположных, равновероятных сигналов одинаковой энергии это неравенство преобразуется к виду

$$\int_0^{\tau_{\text{н}}} z(t)u_{\Delta}(t)dt = 2 \int_0^{\tau_{\text{н}}} z(t)u_1(t)dt > \lambda = 0.$$

Если значение корреляционного интеграла положительно (больше порогового уровня), то в решающем устройстве вырабатывается оценка информационного символа, равная 0^* . Если значение отрицательно (меньше порогового уровня), то в решающем устройстве вырабатывается оценка, равная 1^* . Для различных принимаемых сигналов неравенство конкретизируется.

Например, при приеме изменяющихся по знаку прямоугольных видеоимпульсов с одинаковой амплитудой и длительностью $\tau_{\text{н}}$ неравенство записывается в виде:

$$\int_0^{\tau_{\text{н}}} z(t)dt > 0.$$

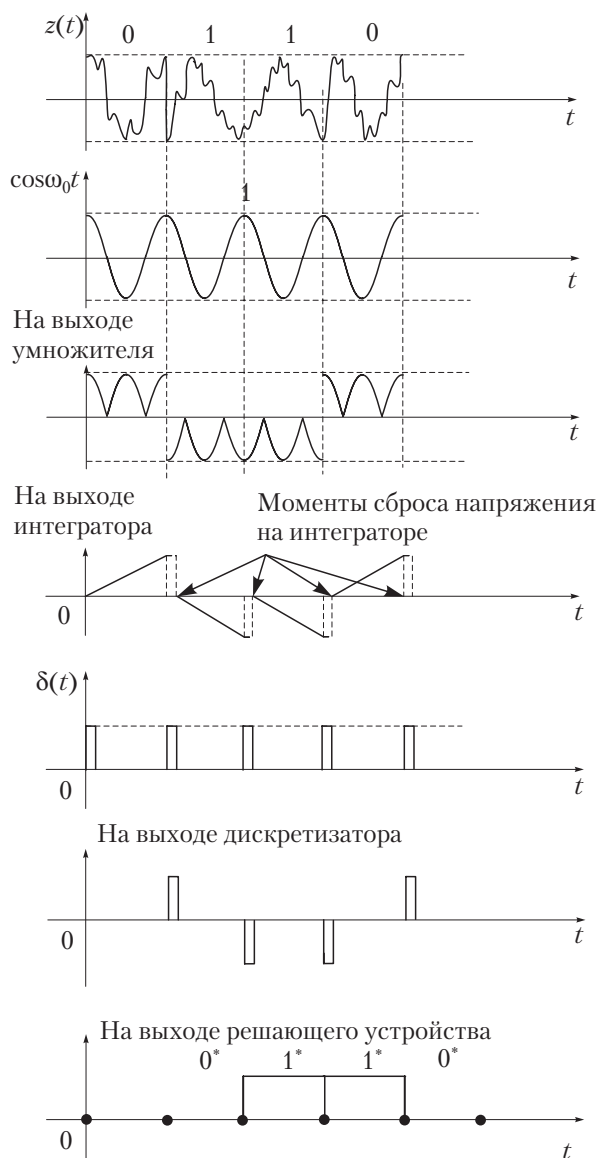


Рис. 7.5. Временные диаграммы, поясняющие работу оптимального приемника (демодулятора) бинарных ФМ сигналов

При бинарном распознавании противоположных двоичных ФМ и ОФМ сигналов неравенство преобразуется к виду

$$\int_0^{\tau_{\text{и}}} z(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) dt > 0,$$

так как разностный сигнал равен $u_{\Delta}(t) = 2a \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Структурная схема оптимального распознавателя противоположных сигналов содержит умножитель, где входная смесь умножается на опорный сигнал, интегратор и решающее устройство, на выходе которого формируется оценка принимаемого символа. Например, схема оптимального распознавателя (демодулятора) двоичных ФМ сигналов аналогична схеме на рис. 7.3. Так же как и при приеме двоичного АМ сигнала, известного точно, для нормальной работы оптимального приемника необходимо обеспечить подачу опорного гармонического колебания на второй вход умножителя в корреляторе и коротких импульсов на второй вход дискретизатора, а также производить сброс накопленного напряжения интегратором в конце интервала наблюдения. Однако в отличие от схемы оптимального обнаружителя сигнала уровень порога в схеме оптимального распознавателя сигналов равен нулю, если энергии сигналов и вероятности информационных символов 0, 1 равны.

Временные диаграммы, поясняющие работу оптимального приемника двоичных ФМ сигналов, приведены на рис. 7.5.

Структурная схема оптимального демодулятора сигнала с однократной ОФМ приведена на рис. 7.6. Она содержит оптимальный распознаватель ФМ сигнала и преобразователь относительного двоичного кодового слова в информационное кодовое слово.

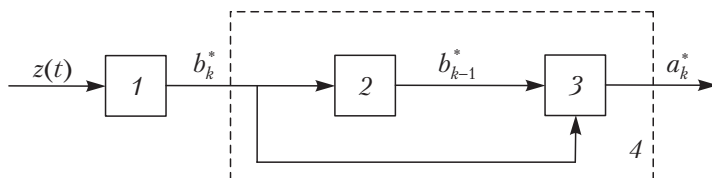


Рис. 7.6. Структурная схема оптимального демодулятора с однократной ОФМ сигнала:

1 — оптимальный распознаватель ФМ сигнала; 2 — линия задержки на один единичный интервал; 3 — сумматор по модулю два; 4 — преобразователь

Работа преобразователя поясняется временными диаграммами (рис. 7.7) и основана на суммировании по модулю два принятого символа b_k^* и принятого в предыдущем тактовом интервале символа b_{k-1}^* , т.е. $a_k^* = b_k^* + b_{k-1}^*$.

Для ортогональных равновероятных бинарных сигналов одинаковой энергии неравенство (7.20) преобразуется к виду

$$\int_0^{\tau_H} z(t)u_1(t)dt > \int_0^{\tau_H} z(t)u_2(t)dt. \quad (7.21)$$

Это неравенство определяет алгоритм оптимального распознавания двух ортогональных равновероятных сигналов одинаковой энергии. Например, бинарное распознавание ЧМ сигналов определяется следующими эквивалентными неравенствами:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_H} z(t)[\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \cos(\omega_2 t + \varphi_2)]dt &> 0, \\ \int_0^{\tau_H} z(t)\cos(\omega_1 t + \varphi_1)dt &> \int_0^{\tau_H} z(t)\cos(\omega_2 t + \varphi_2)dt. \end{aligned} \quad (7.22)$$

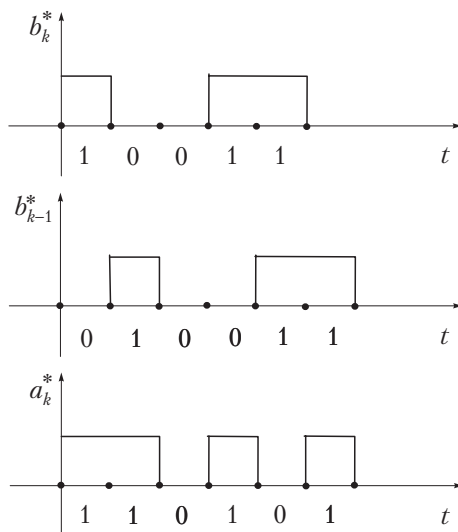


Рис. 7.7. Временные диаграммы, поясняющие работу преобразователя

Если неравенство выполняется, то принимается решение о приеме символа, равного нулю, если не выполняется — решение о приеме символа, равного единице.

Оптимальный демодулятор можно строить, используя один или два коррелятора. Схема с одним коррелятором приведена на рис. 7.2. Уровень порога в этой схеме равен нулю.

Схема с двумя корреляторами является частным случаем схемы на рис. 7.1 при $m = 2$.

7.2.4. Реализация алгоритма оптимального приема на основе согласованных фильтров

Алгоритмы оптимального бинарного обнаружения и бинарного распознавания, рассмотренные выше, определяют необходимые операции со смесью сигнала и шума. Главной из них является вычисление значений взаимно корреляционных функций между принимаемой смесью и опорными сигналами. Эти вычисления реализуются с помощью корреляторов.

Алгоритм оптимального приема сигналов, известных точно, можно реализовать также на основе согласованного фильтра. Если на вход согласованного с принимаемым сигналом фильтра подать смесь этого сигнала и шума, то сигнал на выходе фильтра будет содержать значение взаимно корреляционной функции между смесью сигнала и шума и сигналом, с которым этот фильтр согласован.

Под **согласованным фильтром** понимают линейный четырех-полюсник, коэффициент передачи которого

$$K(j\omega) = cS^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}, \quad (7.23)$$

где c — постоянное число; $S^*(j\omega)$ — функция, комплексно сопряженная со спектральной плотностью сигнала; $e^{-j\omega t_0}$ — фазовый множитель, совпадающий с коэффициентом передачи идеальной линии задержки.

Если сигнал отвечает условию абсолютной интегрируемости и для него можно найти спектральную плотность, то для этого сигнала можно найти и согласованный фильтр с коэффициентом передачи, который определяется формулой (7.23). Сигнал и фильтр образуют пару. Число возможных пар определяется всеми сигналами, которые удовлетворяют указанному условию.

Спектральная плотность сигнала на выходе согласованного фильтра

$$\begin{aligned} S_{\text{вых}}(j\omega) &= cS(j\omega)K(j\omega) = cS(j\omega)S^*(j\omega)e^{-j\omega t_0} = \\ &= c|S(j\omega)|^2 e^{-j\omega t_0}, \end{aligned}$$

где $S(j\omega)$ — спектральная плотность сигнала на входе фильтра.

Отклик согласованного фильтра на входной сигнал с учетом формулы (2.23) равен

$$u_{\text{вых}}(\tau - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c|S(j\omega)|^2 e^{-j\omega t_0} e^{j\omega\tau} d\omega = cR(\tau - t_0).$$

Значение отклика с точностью до постоянного числа совпадает с автокорреляционной функцией входного сигнала. При $\tau = t_0$ и $c = 1$ значение отклика равно энергии сигнала.

Линейная согласованная фильтрация сложного ПС позволяет получить на выходе согласованного фильтра сжатый во времени сигнал. Преобразование сигнала, позволяющее уменьшить его длительность, называется **сжатием сигнала во времени**.

Например, автокорреляционная функция сигнала, кодированного кодом Баркера длиной в 3 символа (см. рис. 2.8), содержит основной лепесток положительной полярности и боковые лепестки отрицательной полярности. Длительность основного лепестка на уровне, равном половине энергии этого сигнала, условно принимают за длительность сигнала на выходе согласованного фильтра. Очевидно, что замена выходного сигнала, состоящего из основного и боковых лепестков, основным лепестком допустима, если боковые лепестки во много раз меньше основного лепестка. Поиск сложных сигналов с минимальными боковыми лепестками решается в рамках теории сигналов, результаты которой используются не только в системах связи, но и в других (в первую очередь радиолокационных) системах. Отношение длительности входного сигнала к длительности основного лепестка называется **коэффициентом сжатия сигнала во времени**. Коэффициент сжатия зависит от базы сигнала.

При подаче на вход фильтра, согласованного с сигналом, другого сигнала выходной сигнал равен взаимно корреляционной функции между этими сигналами:

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1^*(j\omega) S_2(j\omega) e^{j\omega(\tau-t_0)} d\omega = c R_{1,2}(\tau - t_0). \end{aligned}$$

Если сигналы удовлетворяют условию ортогональности, то при сдвиге $\tau = t_0$ значение отклика равно нулю. Рассмотрим другие свойства согласованного фильтра.

Импульсная характеристика согласованного фильтра является зеркальным отображением сигнала, с которым этот фильтр согласован.

Вычислим реакцию согласованного фильтра на входной сигнал, используя интеграл Дюамеля:

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau,$$

где $h(t)$ — импульсная характеристика согласованного фильтра.

Если фильтр согласован с входным сигналом, то, как показано выше, $u_{\text{вых}}(t) = R(t)$.

Следовательно, с учетом формулы (2.21) и равенства $R(t) = R(-t)$ получим

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) u(\tau - t) d\tau. \quad (7.24)$$

Из формулы (7.24) находим, что

$$h(t - \tau) = u(-t + \tau).$$

Замена в выражении импульсной характеристики аргумента $t - \tau$ на x приводит к равенству

$$h(x) = u(-x).$$

Отношение мгновенной мощности сигнальной составляющей в момент времени t_0 к средней мощности шума на выходе согласо-

ванного фильтра равно $2E/N_0 = 2h^2$, где E — энергия сигнала, N_0 — мощность шума, приходящаяся на единицу полосы.

Мгновенная мощность сигнала на выходе согласованного фильтра

$$u_{\text{вых}}^2(t_0) = \left[\frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) S^*(j\omega) e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega \right]^2 = c^2 E^2.$$

Средняя мощность шума на выходе согласованного фильтра

$$P_{\text{ш}} = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |c S^*(j\omega) e^{-j\omega t_0}|^2 d\omega = \frac{c^2 N_0 E}{2}.$$

Отношение мгновенной мощности сигнала к средней мощности шума на выходе фильтра в момент времени t_0 максимально, если его коэффициент передачи удовлетворяет уравнению (7.23). Это отношение

$$\rho_{\text{пик}} = \frac{u_{\text{вых}}^2(t_0)}{P_{\text{ш}}} = \frac{c^2 E^2}{c^2 N_0 E / 2} = \frac{2E}{N_0} = 2h^2,$$

где $h = \sqrt{E/N_0}$ — параметр обнаружения.

Вычисляя корень квадратный, получим отношение мгновенного значения сигнала к среднеквадратичному значению шума:

$$\rho_{\text{вых}} = \sqrt{\rho_{\text{пик}}} = \sqrt{2}h.$$

Отношение сигнал/шум, выраженное как отношение мгновенного значения сигнала в момент времени t_0 к среднеквадратичному значению шума на выходе согласованного фильтра, определяется параметром обнаружения.

Пример 7.2. Определить выигрыш в помехоустойчивости при бинарном обнаружении прямоугольного видеоимпульса, если в приемнике содержится согласованный фильтр. Амплитуда импульса равна A , а его длительность составляет $\tau_{\text{и}}$. Во сколько раз увеличится выигрыш, если вместо прямоугольного импульса использовать шумоподобный видеосигнал той же длительности, построенный из разнополярных видеоимпульсов длительностью $\tau_0 < \tau_{\text{и}}$?

Решение. Применим формулу для отношения сигнал/шум на выходе согласованного фильтра:

$$\rho_{\text{вых}} = \sqrt{\rho_{\text{шк}}} = \sqrt{2h} = \sqrt{2E/N_0}.$$

Энергия сигнала на входе фильтра

$$E = P_c \tau_{\text{и}},$$

где P_c — мощность сигнала.

Мощность шума, приходящаяся на единицу полосы,

$$N_0 = P_{\text{ш}}/\Delta f,$$

где $P_{\text{ш}}$ — мощность шума на входе; Δf — ширина спектра сигнала.

Для прямоугольного видеоимпульса $\Delta f = 1/\tau_{\text{и}}$.

Подставляя вычисленные значения в формулу для выходного отношения сигнал/шум, получим

$$\rho_{\text{вых}} = \sqrt{2P_c \tau_{\text{и}}/(P_{\text{ш}} \tau_{\text{и}})} = \sqrt{2\rho_{\text{вх}}},$$

где отношение сигнал/шум на входе согласованного фильтра

$$\rho_{\text{вх}} = \sqrt{P_c/P_{\text{ш}}}.$$

Отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра к отношению сигнал/шум на входе характеризует выигрыш в помехоустойчивости за счет согласованной фильтрации:

$$g_1 = \rho_{\text{вых}}/\rho_{\text{вх}} = \sqrt{2}.$$

Для ШС

$$\rho_{\text{вых}} = \sqrt{2P_c \tau_{\text{и}}/(P_{\text{ш}} \tau_0)} = \sqrt{2\tau_{\text{и}}\Delta f} \rho_{\text{вх}},$$

где $\Delta f = 1/\tau_0$ — ширина спектра ШС.

Из последней формулы определяем выигрыш в помехоустойчивости за счет согласованной фильтрации:

$$g_2 = \rho_{\text{вых}}/\rho_{\text{вх}} = \sqrt{2\tau_{\text{и}}\Delta f}.$$

Выигрыш тем больше, чем больше база сигнала, равная $\tau_{\text{и}}\Delta f$.

Чтобы определить увеличение выигрыша за счет использования кодирования сигнала, нужно найти отношение

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{\sqrt{2\tau_{\text{и}}\Delta f}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\tau_{\text{и}}\Delta f} = \sqrt{N},$$

где N — период, равный базе ШС.

Приведенные оценки помехоустойчивости приема сигналов с использованием согласованного фильтра полностью совпадают с оценками помехоустойчивости корреляционных приемников, которые приведены выше (см. п. 7.2.2).

Рассмотрим пример реализации бинарного распознавателя, реализованного на согласованных фильтрах. Пусть на входе присутствует двоичный ЧМ сигнал. Соответствующая этому случаю приема схема приведена на рис. 7.8. Она содержит два одинаковых канала (верхний и нижний) и решающее устройство. В каждом канале содержится согласованный фильтр и дискретизатор (управляемый ключ). Согласованные фильтры откликаются только на те сигналы, с которыми они согласованы. Например, фильтр верхнего канала согласован с сигналом, который показан в первом единичном интервале, фильтр нижнего канала — с сигналом, который показан во втором единичном интервале (рис. 7.9, а).

В течение первого единичного интервала на входной сигнал откликается только первый (рис. 7.9, б), а в течение второго интервала — только второй фильтр (рис. 7.9, в). Ключи, управляемые короткими импульсами (рис. 7.9, з), пропускают отклики фильтров на входы решающего устройства только в течение действия этих импульсов. Таким образом, в конце первого единичного интервала выходное напряжение первого ключа не равно нулю, а на выходе второго — равно нулю (рис. 7.9, д). В конце второго единичного интервала напряжение на выходе первого ключа равно нулю, а на выходе второго — не равно нулю (рис. 7.9, е). В зависимости от этого решающее устройство выдает символы, равные 0 или 1.

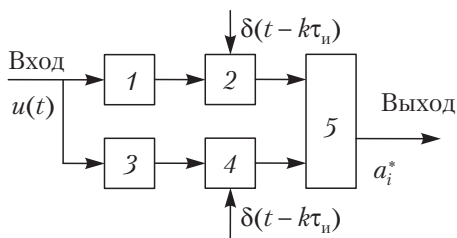


Рис. 7.8. Структурная схема оптимального демодулятора ЧМ сигнала:
1, 3 — согласованные фильтры; 2, 4 — дискретизаторы (ключи);
5 — решающее устройство

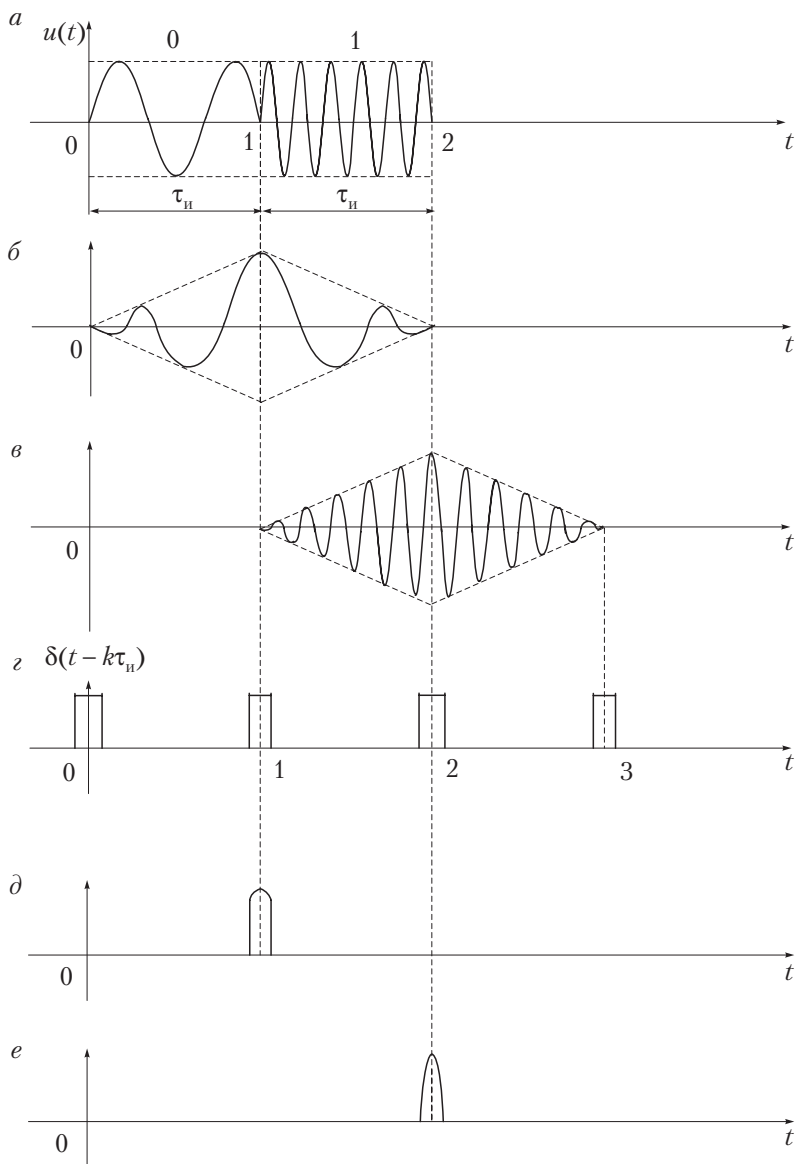


Рис. 7.9. Временные диаграммы, поясняющие работу демодулятора ЧМ сигнала

Пусть на входе присутствует АМ или ФМ сигнал. Соответствующая этим случаям приема схема оптимального демодулятора приведена на рис. 7.10. В отличие от схемы на рис. 7.8, она содержит всего один канал. При помощи ключа осуществляется дискретизация напряжения с выхода согласованного фильтра, затем полученные в конце каждого единичного интервала выборочные значения сравниваются в сравнивающем устройстве с заранее заданным пороговым уровнем. Для двоичного равновероятного АМ сигнала этот порог равен половине от его энергии. Для двоичного равновероятного ФМ сигнала уровень порога равен нулю. В зависимости от результата сравнения на выходе решающего устройства формируется символ, равный или 0, или 1. Временные диаграммы, поясняющие работу демодулятора ФМ сигналов, приведены на рис. 7.11.

В заключение отметим следующие особенности оптимальных приемников.

1. В оптимальных корреляционных приемниках и приемниках на согласованных фильтрах вычисляются энергии принимаемых сигналов, которые затем используются при формировании оценок символов передаваемых информационных последовательностей.

2. Корреляционный приемник содержит опорный генератор, который формирует опорный сигнал, совпадающий по форме, времени и по несущей частоте с принимаемым сигналом. В опорный генератор включаются: измеритель неизвестных параметров принимаемого сигнала и устройство автоподстройки параметров опорного сигнала. По этой причине опорный генератор является относительно сложным устройством.

3. В оптимальном приемнике на согласованном фильтре опорный генератор отсутствует, а необходимая информация о форме и частоте принимаемого сигнала имеется в структуре этого фильтра.

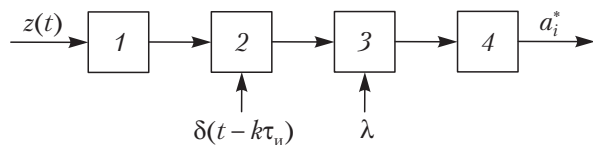


Рис. 7.10. Структурная схема оптимального демодулятора:
1 — согласованный фильтр; 2 — дискретизатор (ключ); 3 — сравнивающее устройство; 4 — решающее устройство

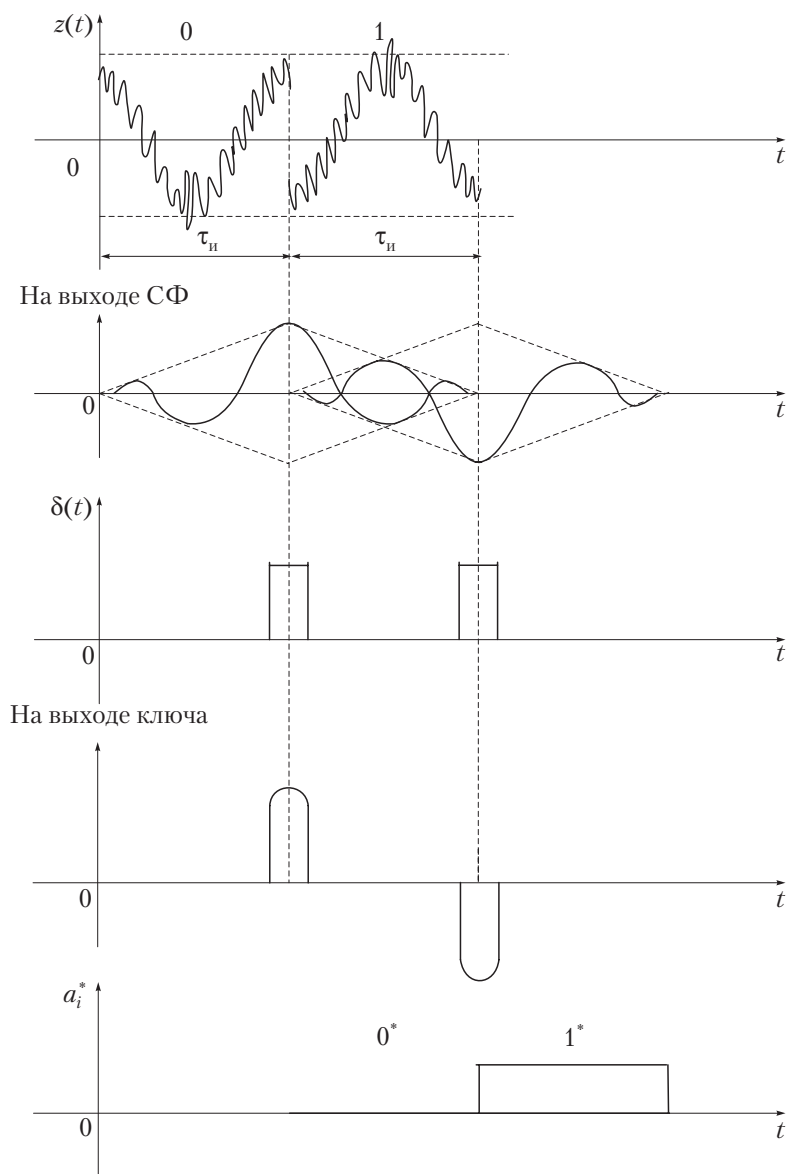


Рис. 7.11. Временные диаграммы, поясняющие работу оптимального демодулятора ФМ сигналов

4. Если задача приема в приемнике на согласованном фильтре может быть решена в течение времени наблюдения смеси сигнала и шума, равного длительности передачи одного информационного символа или длительности передачи одного информационного блока, то в корреляционном приемнике для этого требуется гораздо большее время. Это время, в течение которого опорный сигнал совмещается с принимаемым сигналом и принимается решение о принятом символе или блоке. Совмещение опорного сигнала во времени или по несущей частоте называется **поиском сигнала**. Поиск, связанный с совмещением опорного сигнала во времени, называется *временным поиском*, а поиск, связанный с совмещением опорного сигнала по частоте, называется *частотным поиском*.

5. Форма сигнала на выходе согласованного фильтра существенно отличается от формы сигнала на его входе. Например, при прямоугольной форме радиоимпульса на входе получается ромбовидный импульс на выходе. Однако в сохранении формы нет необходимости, так как передаваемая по дискретному каналу информация определяется не формой сигналов, а передаваемыми символами, связанными с этими сигналами.

6. Оптимальные приемники сигналов, известных точно, имеют существенный недостаток, связанный с необходимостью высокоточных отсчетов значений откликов в заданные моменты времени.

7.3. Оптимальный прием дискретного сигнала со случайными параметрами



7.3.1. Оптимальный прием при неопределенной фазе дискретного сигнала

Этот способ некогерентного приема применяют в случаях, если: а) реализация приема сигнала, известного точно, невозможна и экономически нецелесообразна из-за большой сложности демодулятора; б) оценку фазы и амплитуды получить достаточно трудно из-за их быстрых флуктуаций.

Пусть на входе демодулятора в смеси с нормальным белым шумом присутствует один из возможных сигналов $u_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$ с параметрами, известными точно, за исключением начальных фаз,

которые в промежутке $[0; 2\pi]$ случайны и распределены по равному закону.

Определим структуру оптимального демодулятора, приняв во внимание:

- модель дискретно-непрерывного канала связи, на входе которого действуют сигналы со случайными начальными фазами;
- выражение для функции правдоподобия;
- правило принятия решения.

Модель канала связи рассмотрена в п. 5.2.6. Используя эту модель, запишем выражение для функции правдоподобия, если в смеси сигнала и шума $z(t)$ содержится сигнал $u_i(t)$:

$$w[\bar{y}/(u_i, \varphi_i)] = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - A_i q_i(t) \cos(\omega_i t + \varphi_i)]^2 dt \right\}, \quad (7.25)$$

где A_i — амплитуда радиосигнала $u_i(t)$ с известной частотой ω_i и неизвестной (случайной) начальной фазой φ_i ; T — время анализа смеси сигнала и шума; $q_i(t)$ — двоичный сигнал, определяемый выражением

$$q_i(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_{i,k} u_0(t - k\tau_0), \quad a_{i,k} \in \{-1; 1\},$$

здесь $a_{i,k}$ — символ двоичной кодовой последовательности (например, последовательности Уолша) длиной N ; $u_0(t)$ — прямоугольный импульс с единичной амплитудой и длительностью τ_0 .

Функция правдоподобия является случайной величиной, так как случайной является начальная фаза. Несмотря на это, модуляция сигнала $A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ знакопеременной функцией $q_i(t)$ оказывается возможной, если в интервале приема $T = k\tau_n$, равного длительности одного информационного блока, сохраняется когерентность этого носителя.

Чтобы записать правило принятия решения, рассмотрим вероятность совместных событий: события, которое заключается в реализации на входе канала некоторой буквы a_i , связанной с сигналом $u_i(t)$; события, которое заключается в том, что случайной реализации процесса $z(t)$ соответствует n -мерный вектор, связанный

с появлением на выходе дискретно-непрерывного канала некоторой буквы b_j ; события c_i , которое заключается в том, что значения начальной фазы сигнала принадлежат бесконечно малому интервалу $d\varphi_i$. Вероятность совместных событий

$$P(a_i, b_j, c_i) = P(b_j)P(a_i, c_i/b_j) = P(a_i, c_i) P(b_j/a_i, c_i),$$

где $P(b_j)$ — вероятность события b_j , определяемая равенством (7.2); $P(a_i, c_i/b_j)$ — вероятность совместной реализации событий a_i и c_i при условии появления на выходе канала буквы b_j ; $P(a_i, c_i)$ — вероятность совместной реализации не связанных причинно-следственными связями событий a_i и c_i , т.е.

$$P(a_i, c_i) = P(a_i)P(c_i);$$

$P(b_j/a_i, c_i)$ — функция правдоподобия, равная условной вероятности реализации буквы b_j при условии, что в смеси сигнала и шума присутствует сигнал $u_i(t)$, а его фаза находится в области $d\varphi_i$.

Используя полученное выражение для вероятности трех совместных событий, найдем:

$$P(a_i, c_i/b_j) = \frac{P(a_i)P(c_i)}{P(b_j)} P(b_j/a_i, c_i), \quad (7.26)$$

где $P(b_j) = w(\bar{y})d\bar{y}$ — вероятность реализации n -мерного вектора; $P(b_j/a_i, c_i) = w(\bar{y}/u_i, \varphi_i)d\bar{y}$ — условная случайная вероятность, зависящая от случайной начальной фазы φ_i .

При приеме сигналов со случайными начальными фазами использование неравенства

$$p(a_i, c_i/b_j) > p(a_j, c_j/b_j),$$

при помощи которого сравниваются случайные числа, теряет смысл.

Задача решается, если условные вероятности усреднить по случайным начальным фазам φ_i, φ_j .

Правило принятия решения по критерию максимальной средней обратной вероятности в этом случае записывается в виде

$$\begin{aligned} & \frac{p(a_i)p(c_i)}{p(b_j)} \int_0^{2\pi} w(\bar{y}/u_i, \varphi_i)d\bar{y} \frac{1}{2\pi} d\varphi_i > \\ & > \frac{p(a_j)p(c_j)}{p(b_j)} \int_0^{2\pi} w(\bar{y}/u_j, \varphi_j)d\bar{y} \frac{1}{2\pi} d\varphi_j. \end{aligned}$$

Сокращая одинаковые выражения в левой и правой частях неравенства и учитывая, что

$$p(a_i) = p[u_i(t)],$$

$$p(a_j) = p[u_j(t)],$$

$$p(c_i) = p(c_j),$$

правило принятия решения запишем в виде

$$P[u_i(t)] \int_0^{2\pi} w[\bar{y}/(u_i, \varphi_i)] d\varphi_i > P[u_j(t)] \int_0^{2\pi} w[\bar{y}/(u_j, \varphi_j)] d\varphi_j. \quad (7.27)$$

Неравенство преобразуем к виду

$$\frac{\int_0^{2\pi} w[\bar{y}/(u_i, \varphi_i)] d\varphi_i}{\int_0^{2\pi} w[\bar{y}/(u_j, \varphi_j)] d\varphi_j} > \frac{P[u_j(t)]}{P[u_i(t)]}, \quad j \neq i, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Подставив в неравенство выражения для функций правдоподобия и выполнив преобразования, получим

$$\frac{\exp\left[-\frac{E_i}{N_0}\right] \int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{2A_i}{N_0} \int_0^T z(t) q_i(t) \cos(\omega_i t + \varphi_i) dt\right] d\varphi_i}{\exp\left[-\frac{E_j}{N_0}\right] \int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{2A_j}{N_0} \int_0^T z(t) q_j(t) \cos(\omega_j t + \varphi_j) dt\right] d\varphi_j} > \frac{P[u_j(t)]}{P[u_i(t)]}, \quad (7.28)$$

$$j \neq i, \quad i, j = 1, 2, \dots, m,$$

где E_i — энергия сигнала $u_i(t)$:

$$E_i = \int_0^T A_i^2 q_i^2(t) \cos^2(\omega_i t + \varphi_i) dt;$$

N_0 — мощность шума, приходящаяся на единицу полосы.

Приняв во внимание формулу

$$\cos(\omega_i t + \varphi_i) = \cos \omega_i t \cos \varphi_i - \sin \omega_i t \sin \varphi_i,$$

запишем:

$$\begin{aligned} \int_0^T z(t)q_i(t)\cos(\omega_i t + \varphi_i)dt &= \left[\int_0^T z(t)q_i(t)\cos\omega_i t dt \right] \cos\varphi_i - \\ &- \left[\int_0^T z(t)q_i(t)\sin\omega_i t dt \right] \sin\varphi_i = x_i \cos\varphi_i - y_i \sin\varphi_i, \end{aligned} \quad (7.29)$$

где $x_i = \int_0^T z(t)q_i(t)\cos\omega_i t dt$; $y_i = \int_0^T z(t)q_i(t)\sin\omega_i t dt$.

Считая значения x_i , y_i проекциями некоторого вектора M_i на оси x , y , запишем

$$x_i = M_i \cos\theta_i, \quad y_i = M_i \sin\theta_i. \quad (7.30)$$

Подставляя выражения (7.30) в формулу (7.29), получим

$$\int_0^T z(t)q_i(t)\cos(\omega_i t + \varphi_i)dt = M_i \cos(\theta_i + \varphi_i). \quad (7.31)$$

Преобразование интеграла, входящего в выражение знаменателя левой части неравенства (7.28), приводит к аналогичному результату:

$$\int_0^T z(t)q_j(t)\cos(\omega_j t + \varphi_j)dt = M_j \cos(\theta_j + \varphi_j). \quad (7.32)$$

Далее подставим выражения (7.31) и (7.32) в неравенство (7.28):

$$\frac{[\exp(-E_i/N_0)]I_0(2A_i M_i/N_0)}{[\exp(-E_j/N_0)]I_0(2A_j M_j/N_0)} > \frac{P[(u_j(t))]}{P[(u_i(t))]},$$

$$j \neq i, \quad i, j = 1, 2, \dots, m,$$

где модифицированные функции Бесселя нулевого порядка определяются формулой

$$I_0(2AM/N_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[(2AM/N_0)\cos(\theta + \varphi)]d\varphi.$$

Вычисляя логарифм левой и правой частей полученных неравенств, перепишем их в виде

$$\begin{aligned} & \ln I_0 \left(\frac{2A_i}{N_0} M_i \right) + \ln P[u_i(t)] - E_i/N_0 > \\ & > \ln I_0 \left(\frac{2A_j}{N_0} M_j \right) + \ln P[u_j(t)] - E_j/N_0, \end{aligned} \quad (7.33)$$

$$i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, m.$$

Неравенства определяют структуру оптимального многоканального приемника, решающего задачу распознавания одного из m сигналов со случайной начальной фазой на фоне нормального белого шума.

Схема i -го канала этого приемника, построенного на корреляторах, j -й канал, определяемый аналогичной схемой, сумматоры и решающее устройство приведены на рис. 7.12. Аргумент $2A_i M_i/N_0$ вычисляется с помощью устройств, которые включены до амплитудного детектора. С помощью амплитудного детектора вычисляется функция этого аргумента $\ln I_0\{2A_i M_i/N_0\}$. В сумматоре к напряжению с выхода амплитудного детектора добавляется разность $\ln p[u_i(t)] - E_i/N_0$. Аналогичные устройства входят и в канал с номером j , с помощью которых вычисляется правая часть неравенства.

На выходе оптимального приемника реализуется оценка двоичного слова блока длиной k символов передаваемой информационной последовательности.

Структурную схему оптимального корреляционного приемника можно заменить схемой приемника, построенного на согласованных фильтрах. Она содержит m каналов, выходы которых подключены к входам решающего устройства. В каждом канале включен линейный фильтр, согласованный с соответствующей формой сигнала и всеми его параметрами, кроме случайной начальной фазы, а также амплитудный детектор.

Варианты приемников на корреляторах и согласованных фильтрах рассматриваются ниже.

Прием дискретного ЧМ-ФМ сигнала. Для этого случая сигналы $u_i(t) = Aq_i(t) \cos(\omega_i t + \varphi_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$, отличаются значениями частот, номера которых связаны со словами блоков информационной двоичной последовательности и кодовыми видеопоследова-

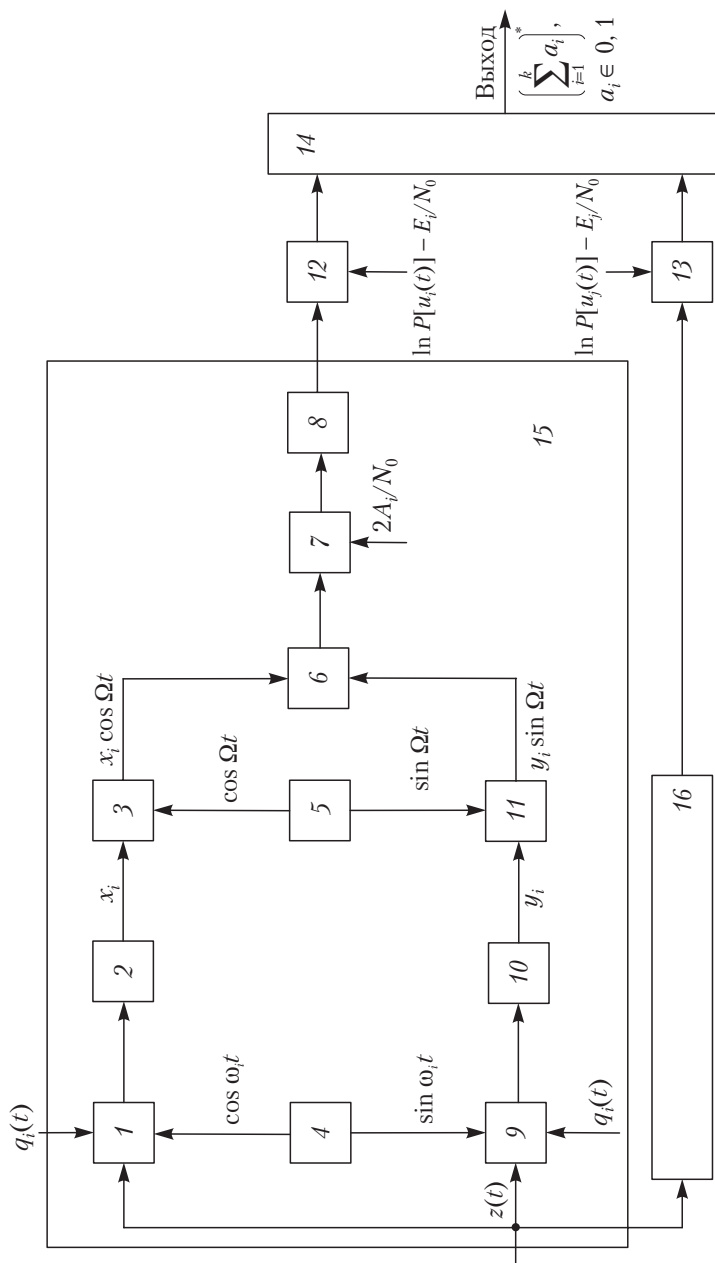


Рис. 7.12. Структурная схема оптимального приемника одного из m сигналов с неопределенной начальной фазой:

1, 3, 7, 9, 11 — умножители; 2, 10 — интеграторы; 4, 5 — генераторы частот; 6 — вычитающее устройство; 8 — амплитудный детектор; 12, 13 — суммирующие устройства; 14 — решающее устройство; 15 — i -й канал; 16 — j -й канал

тельностью $q_i(t) = 1, i = 1, 2, 3, \dots, m$, номера которых также связаны со словами блоков. Начальные фазы радиосигналов в пределах времени анализа смеси сигнала и шума в приемнике остаются неизменными, но неизвестными, и от одного интервала к другому — случайными. Сохранение начальной фазы сигнала в течение определенного отрезка времени (этот интервал называется *интервалом когерентности*) открывает возможность кодирования сигнала двоичными кодами. Это увеличивает скрытность передачи информации, а также помехоустойчивость приемника. Неравенство частот и кодовых последовательностей обеспечивает выполнение условия ортогональности сигналов.

Соотношения, определяющие структуру приемника в этом случае при приеме равновероятных сигналов одинаковой энергии, имеют вид

$$\ln I_0(2AM_i/N_0) > \ln I_0(2AM_j/N_0), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, m,$$

$$M_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} = \sqrt{\left[\int_0^T z(t)q_i(t) \cos \omega_i t dt \right]^2 + \left[\int_0^T z(t)q_i(t) \sin \omega_i t dt \right]^2}. \quad (7.34)$$

Структурная схема оптимального приемника содержит m одинаковых каналов, выходы которых соединены с входами решающего устройства. Многоканальный приемник реализуется на базе коррелятора или согласованного фильтра. На выходе приемника формируются оценки двоичных слов блоков.

Целью приемника является распознавание сигнала на входе приемника, следовательно, и передаваемого двоичного слова блока. Если в смеси сигнала и шума присутствует i -й сигнал, то максимум среднего значения напряжения в момент окончания анализа этой смеси будет на выходе i -го канала, а на выходах других каналов средние значения будут равны нулю. По этому максимуму определяется номер канала и номер сигнала. По номеру сигнала определяется оценка слова блока.

Прием дискретного ЧМ сигнала. Этот случай является частным случаем приема (распознавания) ЧМ-ФМ сигналов. Сигналы $u_i(t) = A \cos(\omega_i t + \phi_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ по фазе не кодируются и отличаются только значениями частот, номера которых связаны

со словами блоков информационной двоичной последовательности. Их амплитуды равны, а начальные фазы случайны.

Неравенства, определяющие структуру приемника при приеме равновероятных сигналов одинаковой энергии, имеют вид

$$\ln I_0(2AM_i/N_0) > \ln I_0(2AM_j/N_0);$$

$$i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, m,$$

$$M_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} = \sqrt{\left[\int_0^T z(t) \cos \omega_i t dt \right]^2 + \left[\int_0^T z(t) \sin \omega_i t dt \right]^2}.$$

Структурная схема оптимального корреляционного приемника (в отличие от схемы приемника ЧМ-ФМ сигнала) не требует использования опорных последовательностей $q_i(t)$, так как необходимость в таких сигналах в этом случае отпадает.

Прием ортогональных шумоподобных сигналов одинаковой энергии. Этот случай отличается тем, что принимаемые сигналы $u_i(t) = Aq_i(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ являются ШС, модулированными по форме (см. п. 3.7.3). Несущие частоты всех принимаемых сигналов равны ω_0 , начальные фазы случайны, но в течение длительности одного блока их значения сохраняются, что позволяет применить двоичную фазовую модуляцию. Энергии сигналов также равны. Модулирующая функция, определяющая i -й ШС,

$$q_i(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_{i,k} u_0(t - k\tau_0),$$

где $a_{i,k} \in \{-1; 1\}$ — символы кодовой последовательности; $u_0(t)$ — прямоугольный импульс с единичной амплитудой, длительность которого равна τ_0 ; N — период кодовой последовательности.

В качестве кодовых последовательностей могут использоваться ортогональные последовательности (Уолша, Д-последовательности и др.). Пронумерованные кодовые последовательности одинаковой длины образуют коды (см. приложения 3, 4).

Неравенства, определяющие структуру приемника при приеме равновероятных сигналов, имеют вид

$$\ln I_0(2AM_i/N_0) > \ln I_0(2AM_j/N_0),$$

$$i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, m,$$

$$M_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} = \sqrt{\left[\int_0^T z(t) q_i(t) \cos \omega_0 t dt \right]^2 + \left[\int_0^T z(t) q_i(t) \sin \omega_0 t dt \right]^2}.$$

Структурная схема оптимального приемника содержит m одинаковых каналов. При приеме одного из m ортогональных сигналов на фоне шума только на выходе одного из каналов будет наибольшее среднее напряжение, а на выходах остальных каналов средние значения напряжений будут равны нулю. Так же как и для предыдущих случаев приема, по наибольшему напряжению определяется номер канала и номер сигнала. По номеру сигнала определяется оценка слова блока.

Прием двоичных сигналов. Правило оптимального приема двоичных равновероятных сигналов определяется неравенством

$$\ln I_0(2A_1M_1/N_0) - E_1/N_0 > \ln I_0(2A_2M_2/N_0) - E_2/N_0. \quad (7.35)$$

Неравенство можно реализовать как на корреляторах, так и на согласованных фильтрах.

Структурная схема оптимального демодулятора, реализующего алгоритм (7.35) на согласованных фильтрах (рис. 7.13) содержит два идентичных канала. В каждом из этих каналов смесь сигнала и шума фильтруется согласованным фильтром, а затем детектируется амплитудным детектором с характеристикой $\ln I_0(x)$, где $x = 2AM/N_0$. График функции $\ln I_0(x)$ аналогичен характеристике

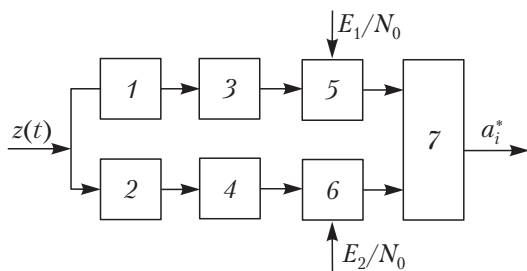


Рис. 7.13. Структурная схема оптимального демодулятора, построенного на согласованных фильтрах:

1, 2 — согласованные фильтры; 3, 4 — амплитудные детекторы;
5, 6 — вычитающие устройства; 7 — решающее устройство

диода. Кроме согласованных фильтров и амплитудных детекторов, схема содержит вычитающие устройства и решающее устройство, на выходе которого формируется оценка передаваемого информационного символа.

Рассмотрим варианты приема двоичных сигналов на фоне шума: бинарное обнаружение и бинарное распознавание.

Бинарное обнаружение реализуется при приеме двоичных АМ радиосигналов. В качестве таких сигналов могут использоваться радиоимпульсы заданной длительности со случайными начальными фазами, а также шумоподобные, модулированные по амплитуде сигналы со случайными начальными фазами.

Бинарное распознавание реализуется при оптимальном приеме:

- двоичного ЧМ сигнала со случайной начальной фазой;
- модулированного по форме ШС при длине информационного блока $k = 1$, что соответствует использованию двух форм этого сигнала при передаче по каналу информационных символов 0, 1;
- сигнала с однократной ОФМ со случайной начальной фазой.

При передаче информации по двоичному каналу на входе оптимального приемника, решающего задачу бинарного обнаружения, присутствует смесь полезного сигнала и шума $z(t)$. Если по каналу передается информационный символ 1, то на входе оптимального приемника в этой смеси присутствует сигнал $u_1(t) \neq 0$, а если по каналу передается информационный символ 0, то на входе оптимального приемника в смеси $z(t)$ сигнал отсутствует ($u_2(t) = 0$). Неравенство (7.35) для этого случая записывается в виде

$$\ln I_0(2A_1M_1/N_0) - E_1/N_0 > 0.$$

Для реализации полученного неравенства требуется всего один канал. В качестве такого канала в случае реализации приемника на согласованных фильтрах может быть верхний канал схемы на рис. 7.13. В схему оптимального приемника войдут: согласованный фильтр, амплитудный детектор и решающее устройство (вместо вычитающего устройства), в котором выборка напряжения с выхода детектора сравнивается с пороговым уровнем $\lambda = E_1/N_0$. В результате на выходе решающего устройства формируется оценка информационного символа a_i^* .

При превышении порогового уровня принимается решение о приеме информационного символа $a_i^* = 1$, а если порог не превы-

шается, то принимается решение о приеме информационного символа $a_i^* = 0$. Временные диаграммы, поясняющие работу оптимального демодулятора АМ радиопульсов, приведены на рис. 7.14.

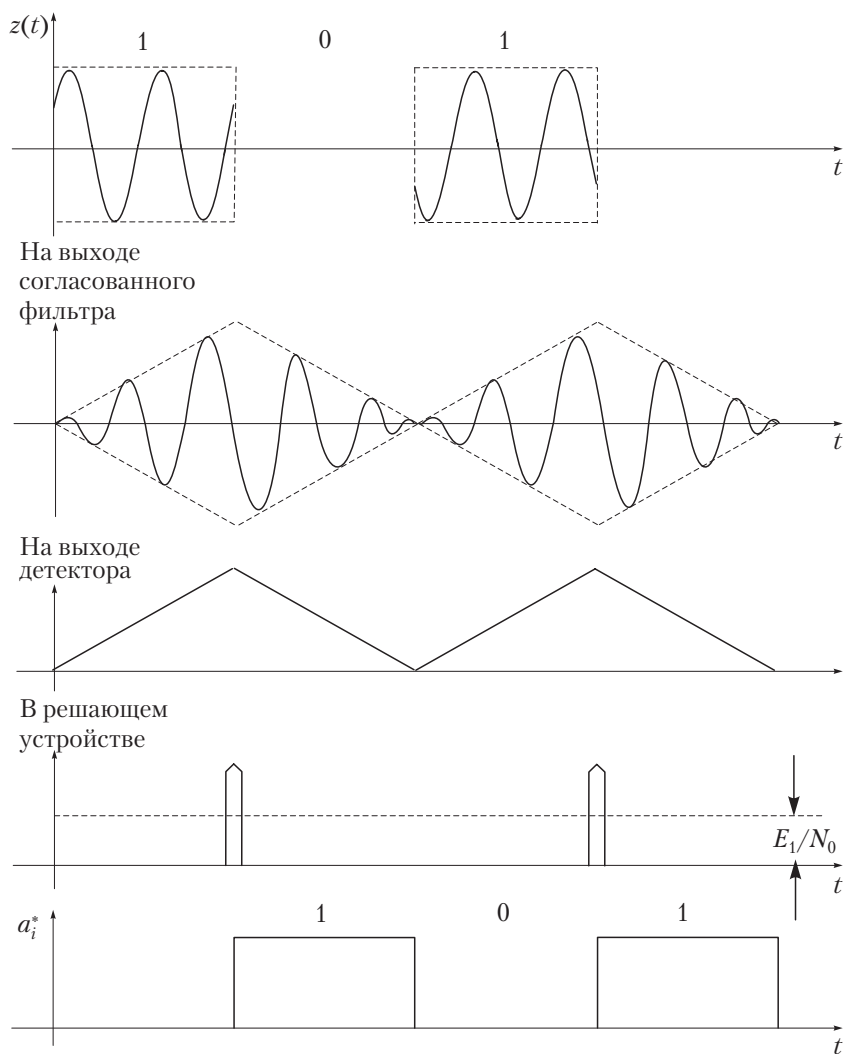


Рис. 7.14. Временные диаграммы, поясняющие работу оптимального демодулятора АМ сигнала со случайной начальной фазой

Структурная схема, определяемая неравенством (7.35), в которой реализуется бинарное распознавание двоичного ЧМ сигнала или ШС модулированного по форме при длине информационного блока $k = 1$, приведена на рис. 7.13. Работа бинарного распознавателя при приеме двоичного ЧМ сигнала поясняется временными диаграммами, которые приведены на рис. 7.15.

Смесь сигнала и шума фильтруется согласованными фильтрами. Фильтр 1 согласован с сигналом $u_1(t)$, а фильтр 2 согласован с сигналом $u_2(t)$. На выходах амплитудных детекторов выделяются огибающие радиосигналов с выходов согласованных фильтров. Из значений этих огибающих (в конце интервала приема смеси сигнала и шума) вычитаются числа: E_1/N_0 в вычитающем устройстве 5 верхнего канала и E_2/N_0 в вычитающем устройстве 6 нижнего канала. Разности между выборками и числами сравниваются между собой в решающем устройстве.

Если разность больше в верхнем канале, на выходе решающего устройства формируется оценка информационного символа $a_i^* = 0$, а если разность больше в нижнем канале, на выходе решающего устройства формируется оценка информационного символа $a_i^* = 1$.

Решение задачи бинарного распознавания ортогональных ШС, модулированных по форме и длине информационного блока $k = 1$, не отличается от решения задачи бинарного распознавания двоичных ЧМ сигналов. Поэтому схема оптимального приемника для этого случая содержит те же блоки, что и схема оптимального приемника двоичных ЧМ сигналов, а его работа не отличается от работы оптимального приемника двоичных ЧМ сигналов. Однако временные диаграммы, поясняющие работу этих оптимальных приемников, отличаются. Отметим, что в системах связи, в которых применяются двоичные ЧМ сигналы и ШС, модулированные по форме, энергии E_1 и E_2 сигналов выбираются равными (см. рис. 7.13). В этом случае неравенство (7.35) упрощается, а оптимальные приемники не содержат вычитающие устройства 5, 6.

При решении задачи бинарного распознавания сигнала с однократной ОФМ и случайной начальной фазой для описания этого сигнала и его приема используется функциональное пространство (см. § 2.6). Целесообразность этого обусловлена тем, что понятие «разность фаз посылок сигнала» и понятие «угол между функциями в функциональном пространстве» тождественны. Поэтому разность

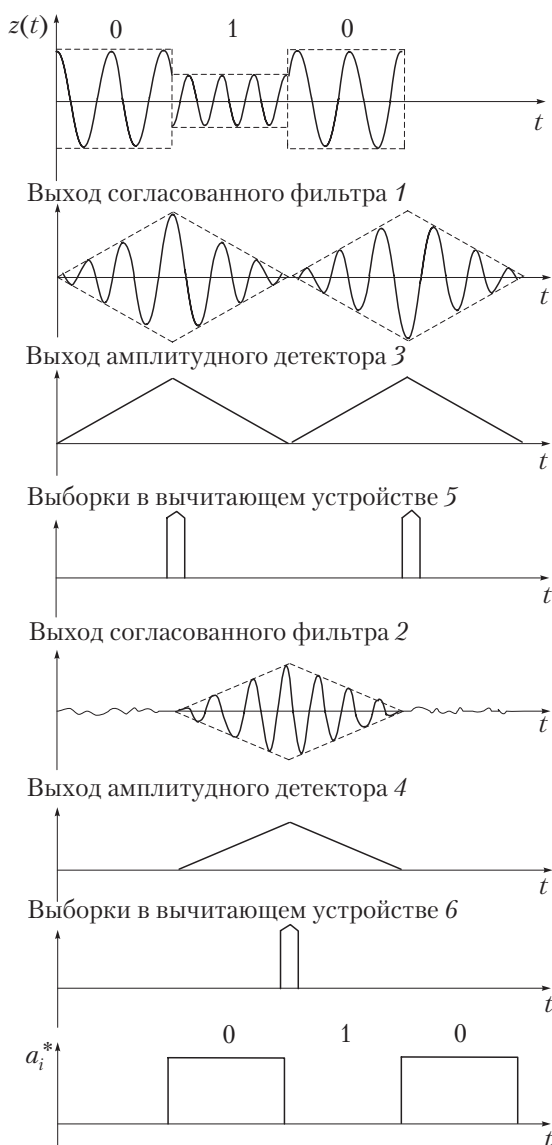


Рис. 7.15. Временные диаграммы, поясняющие работу оптимального демодулятора ЧМ сигнала со случайной начальной фазой (1, 2, ..., 7 см. рис. 7.13)

фаз Ψ посылки сигнала с однократной ОФМ определяется выражением (2.49). Из этого выражения можно найти

$$\cos \Psi = \frac{(z_n, z_{n-1})}{\|z_n\| \|z_{n-1}\|},$$

где (z_n, z_{n-1}) — скалярное произведение смеси посылок сигнала и шума, заданных на отрезке $[0, 2\tau_n]$; τ_n — длительность посылки сигнала.

При отсутствии помех $\cos \Psi \in \{-1; 1\}$, так как $\Psi \in \{0, \pi\}$. С учетом того что норма смеси посылки сигнала и шума положительная величина, оценка информационного символа на выходе приемника определяется выражением

$$\text{sign}(z_n, z_{n-1}) = \text{sign} \left[\int_0^{\tau_n} z_n(t) z_{n-1}(t) dt \right], \quad (7.36)$$

где sign — знак выражений, стоящих в скобках.

Структурная схема приемника, соответствующая выражению (7.36), содержит: коррелятор, включающий последовательно соединенные умножитель и интегратор; дискретизатор, с помощью которого в момент времени $t = \tau_n$ производится отсчет накопленного интегратором напряжения; линию задержки, с помощью которой входная смесь задерживается на время, равное τ_n . На сигнальный вход умножителя поступает посылка сигнала $z_n(t)$, а на опорный вход умножителя — посылка сигнала $z_{n-1}(t)$.

Описанный способ приема сигнала с однократной ОФМ называется **способом сравнения фаз**. Он предложен Н.Т. Петровичем.

Скалярное произведение, входящее в левую часть выражения (7.36), вычисляется также через проекции смеси посылок сигнала и шума на две координатные ортогональные функции $f_1(t) = \sin \omega_0 t$, $f_2(t) = \cos \omega_0 t$:

$$\text{sign}(z_n, z_{n-1}) = \text{sign}[(z_n, f_1)(z_{n-1}, f_1) + (z_n, f_2)(z_{n-1}, f_2)].$$

Раскрывая скалярные произведения, получим

$$\text{sign}(z_n, z_{n-1}) = \text{sign} \left[\int_0^{\tau_n} z_n(t) \sin \omega_0 t dt \int_0^{\tau_n} z_{n-1}(t) \sin \omega_0 t dt + \right.$$

$$+ \int_0^{\tau_n} z_n(t) \cos \omega_0 t dt \int_0^{\tau_n} z_{n-1}(t) \cos \omega_0 t dt. \quad (7.37)$$

Структурная схема приемника, реализующая полученный алгоритм, приведена на рис. 7.16.

Опорные сигналы $f_1(t) = \sin \omega_0 t$, $f_2(t) = \cos \omega_0 t$ создаются с помощью автономного генератора 5 и фазовращателя 6 на угол, равный $\pi/2$.

Входящие в формулу (7.37) определенные интегралы вычисляются с помощью корреляторов 12, 13. Снятые с выходов интеграторов 2, 8 в конце $(n-1)$ -й посылки отсчеты напряжений хранятся в запоминающих устройствах 3, 9 в течение длительности n -й посылки. Вычисленные в течение n -й посылки отсчеты напряжений вместе с отсчетами напряжений, хранящимися в запоминающих устройствах 3, 9, поступают на умножители 4, 10. Полученные с выходов умножителей значения напряжений складываются в сумматоре 11. Знак напряжения на выходе сумматора определяет переданный информационный символ.

Структурная схема приемника, приведенная на рис. 7.16, является оптимальной при приеме сигнала с однократной ОФМ и случайной начальной фазой.

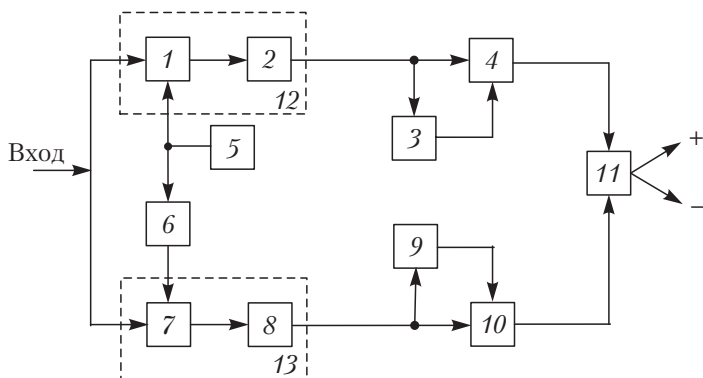


Рис. 7.16. Структурная схема оптимального приемника сигнала с однократной ОФМ и случайной начальной фазой:

1, 4, 7, 10 — умножители; 2, 8 — интеграторы; 3, 9 — запоминающие устройства; 5 — автономный генератор; 6 — фазовращатель на $\pi/2$; 11 — сумматор; 12, 13 — корреляторы

Пример 7.3. Рассчитать отношение сигнал/шум на входе амплитудного детектора в канале приемника. Схема канала приведена на рис. 7.12. В канале присутствует i -й сигнал и нормальный белый шум.

Решение. Выражение для смеси сигнала и шума:

$$z(t) = Aq_i(t)\cos(\omega_i t + \varphi_i) + N(t).$$

Сигнальная и шумовая составляющие на выходах умножителей 1, 9 соответственно равны

$$\begin{aligned} (A/2)[\cos\varphi_i + \cos(2\omega_i t + \varphi_i)], \quad N(t)q_i(t)\cos\omega_i t; \\ (A/2)[- \sin\varphi_i + \sin(2\omega_i t + \varphi_i)], \quad N(t)q_i(t)\sin\omega_i t. \end{aligned}$$

Сигнальная и шумовая составляющие на выходах интеграторов 2, 10 соответственно равны

$$\begin{aligned} (AT/2)\cos\varphi_i + \int_0^T N(t)q_i(t)\cos\omega_i t dt; \\ -(AT/2)\sin\varphi_i + \int_0^T N(t)q_i(t)\sin\omega_i t dt. \end{aligned}$$

Эти напряжения в умножителях 3, 11 умножаются соответственно на $\cos\Omega t$ и $\sin\Omega t$, а затем вычитаются в вычитающем устройстве 6. Результирующее напряжение равно

$$(AT/2)\cos(\Omega t - \varphi_i) + \varepsilon_1 \cos\Omega t - \varepsilon_2 \sin\Omega t,$$

где

$$\varepsilon_1 = \int_0^T N(t)q_i(t)\cos\omega_i t dt, \quad \varepsilon_2 = \int_0^T N(t)q_i(t)\sin\omega_i t dt.$$

Это напряжение умножается на $2A/N_0$ в умножителе 7. В результате на входе амплитудного детектора напряжение равно

$$(2E/N_0)\cos(\Omega t - \varphi_i) + \varepsilon(t),$$

где $\varepsilon(t) = (2A/N_0)\varepsilon_1 \cos\Omega t - (2A/N_0)\varepsilon_2 \sin\Omega t$ — шумовая составляющая; $E = 0,5A^2T$ — энергия радиосигнала на входе приемника; N_0 — мощность шума, приходящаяся на единицу полосы.

Дисперсия шумовой составляющей

$$\begin{aligned} M[\varepsilon^2(t)] &= [(2A/N_0)^2 \cos^2\Omega t + (2A/N_0)^2 \sin^2\Omega t]M(\varepsilon_1^2) - \\ &- (2A/N_0)^2 2\cos\Omega t \sin\Omega t M(\varepsilon_1\varepsilon_2) = (2A/N_0)^2 M(\varepsilon_1^2), \end{aligned}$$

так как $M(\varepsilon_1^2) = M(\varepsilon_2^2)$, $M(\varepsilon_1\varepsilon_2) = 0$.

Вычислим:

$$M(\epsilon_1^2) = M \left[\int_0^T N(t) q_i(t) \cos \omega_i(t) dt \right]^2 = \frac{N_0 T}{4}.$$

Тогда

$$M[\epsilon^2(t)] = (2A/N_0)^2 M(\epsilon_1^2) = \frac{2E}{N_0}.$$

Отношение мгновенной мощности огибающей к мощности шума в момент окончания приема смеси сигнала и шума равно

$$(2E/N_0)^2 / 2E/N_0 = 2E/N_0.$$

Полученное отношение не отличается от отношения на выходе согласованного фильтра для сигнала, известного точно (см. п. 7.2.4).

7.3.2. Оптимальный прием при неопределенной фазе и амплитуде сигнала

Задача синтеза оптимального демодулятора m дискретных сигналов с неопределенной (случайной) фазой и амплитудой решается аналогично задаче синтеза сигналов с неопределенной начальной фазой. Однако условия приема несколько усложняются. Флуктуации сигнала на выходе канала из-за флуктуаций как начальной фазы, так и амплитуды приводят к изменению выражения для функции правдоподобия и выражения для правила принятия решения.

Функция правдоподобия в этом случае

$$\omega[\bar{y}/u_i, k_i, \varphi_i] = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - k_i A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)]^2 dt},$$

где k_i — коэффициент, характеризующий изменение амплитуды A_i сигнала на выходе канала связи. Этот коэффициент является случайной величиной и определен природой замираний сигнала.

Правило принятия решения:

$$\frac{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} w(k_i) w(\bar{y}/u_i, k_i, \varphi_i) dk_i d\varphi_i}{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} w(k_j) w(\bar{y}/u_j, k_j, \varphi_j) dk_j d\varphi_j} > \frac{P[u_j(t)]}{P[u_i(t)]}, \quad j \neq i, \quad i, j = 1, 2, \dots, m,$$

где $w(k_i)$ — плотность распределения коэффициента k_i .

Интегрируя подынтегральные функции соответственно по параметрам φ_i, φ_j , это правило можно переписать в виде

$$\frac{\int_0^\infty w(k_i) \exp\left[-\frac{k_i^2}{N_0} E_i\right] I_0\left(\frac{2k_i A_i}{N_0} M_i\right) dk_i}{\int_0^\infty w(k_j) \exp\left[-\frac{k_j^2}{N_0} E_j\right] I_0\left(\frac{2k_j A_j}{N_0} M_j\right) dk_j} > \frac{P[u_j(t)]}{P[u_i(t)]},$$

$$j \neq i, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где

$$E_i = \int_0^T A_i^2 \cos^2(\omega_i t + \varphi_i) dt, \quad E_j = \int_0^T A_j^2 \cos^2(\omega_j t + \varphi_j) dt.$$

Вычисляя интегралы в полученном выражении для заданной плотности распределения вероятности $w(k)$, можно определить структуру оптимального приемника. Она совпадает со структурой оптимального приемника дискретных сигналов с неопределенной начальной фазой. Изменяются только значения напряжений на входе решающего устройства.

7.4. Неоптимальные методы приема дискретных сообщений



Неоптимальные приемники обычно строятся так, чтобы при несколько меньшей помехоустойчивости получить простое техническое решение, следовательно, и меньшую стоимость аппаратуры или еще какое-то преимущество.

Рассмотрим примеры приема двоичного ЧМ сигнала, известного точно, на фоне нормального белого шума. Оптимальный прием реализуется на базе коррелятора (см. рис. 7.1 для $m = 2$) или согласованного фильтра (см. рис. 7.8). Для нормальной работы оптимального корреляционного приемника необходимо подстраивать начальные фазы опорных радиоимпульсов и временное положение коротких импульсов, поступающих на дискретизаторы. В оптимальном приемнике на согласованных фильтрах необходима только подстройка положения импульсов для получения отсчетных значений напряжений с выходов согласованных фильтров.

Для осуществления указанных подстроек в источниках опорных сигналов необходимо:

- измерять начальные фазы радиоимпульсов принимаемого ЧМ сигнала на фоне нормального белого шума;
- по результатам измерений подстраивать начальные фазы радиоимпульсов опорного ЧМ сигнала.

Для подстройки временного положения коротких видеоимпульсов на выходе источника необходимо:

- непрерывно измерять временное положение единичных интервалов принимаемого ЧМ сигнала на фоне нормального белого шума;
- по результатам измерений подстраивать временное положение коротких импульсов.

Источники указанных сигналов оказываются сложными, следовательно, дорогими.

Высокая стоимость аппаратуры во многих случаях становится решающим фактором в выборе структур приемников. Схема оптимального приемника частично или полностью заменяется неоптимальной в зависимости от дополнительных требований на проектируемую аппаратуру.

Например, схему на рис. 7.1 ($m = 2$) можно полностью заменить схемой, изображенной на рис. 7.12 ($m = 2$), в которой источники опорных сигналов хотя и сохраняются, но начальные фазы опорных радиосигналов на их выходах не подстраиваются. Это существенно упрощает и удешевляет приемник.

Схему на рис. 7.13 часто заменяют схемой на рис. 7.17, что позволяет снизить стоимость аппаратуры за счет:

- замены согласованных фильтров полосовыми фильтрами;
- введения последетекторной обработки сигналов.

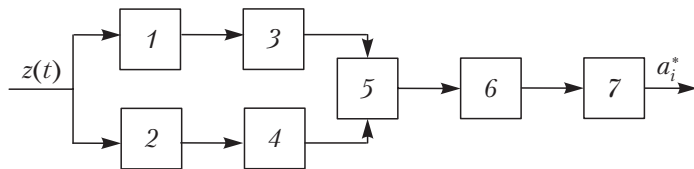


Рис. 7.17. Схема неоптимального некогерентного приема ЧМ сигнала: 1, 2 — полосовые фильтры; 3, 4 — амплитудные детекторы; 5 — разностное устройство; 6 — ФНЧ; 7 — решающее устройство

При замене согласованного фильтра более простым полосовым фильтром коэффициент передачи последнего оказывается лишь частично согласованным со спектральной плотностью входного сигнала. За счет этого отношение сигнала/шум на выходе приемника уменьшается. Подобные фильтры называются *квазиоптимальными*.

При последетекторной обработке отсчет высокочастотного заполнения радиоимпульса заменяется отсчетом его огибающей, что позволяет использовать более простой источник коротких видеоимпульсов с большими флуктуациями их временного положения. Можно вообще отказаться от этого источника и не использовать отсчет огибающей радиосигнала, если изменить правило принятия решения. Принимаемый сигнал (рис. 7.18, *а*) после его фильтрации полосовыми фильтрами разделяется на два (рис. 7.18, *б, в*). Огибающие этих сигналов выделяются с помощью амплитудных детекторов (рис. 7.18, *г, д*) и затем вычитаются (рис. 7.18, *е*). Далее можно было бы взять отсчетные значения полученной разности в моменты времени t_i , $i = 1, 2, 3, 4$ (рис. 7.18, *ж*) и по их знаку производить оценку символов информационного двоичного слова. За счет того, что скорость изменения огибающей около экстремумов функции (рис. 7.18, *е*) во много раз меньше скорости изменения высокочастотного заполнения, можно было бы существенно ослабить требования к стабильности временного положения видеоимпульсов, показанных на рис. 7.18, *ж*. Очевидно, что источник коротких видеоимпульсов был бы существенно упрощен.

В схеме на рис. 7.17 реализован еще более выгодный вариант (с точки зрения аппаратных затрат), в котором источник коротких видеоимпульсов отсутствует, а оценка символа двоичного слова производится по знаку напряжения на выходе разностного устройства и ФНЧ.

Вариант оценки символов иллюстрируется на рис. 7.18, *е*. Если напряжение на выходе ФНЧ пересекает заранее заданный положительный пороговый уровень, то на выходе решающего устройства формируется символ 0, а если напряжение пересекает заданный отрицательный пороговый уровень, то символ 1.

Описанные выше замены приводят:

- ☐ к изменению алгоритма обработки сигнала;
- ☐ изменению условий и ограничений, накладываемых на сигнал;
- ☐ уменьшению помехоустойчивости приемника.

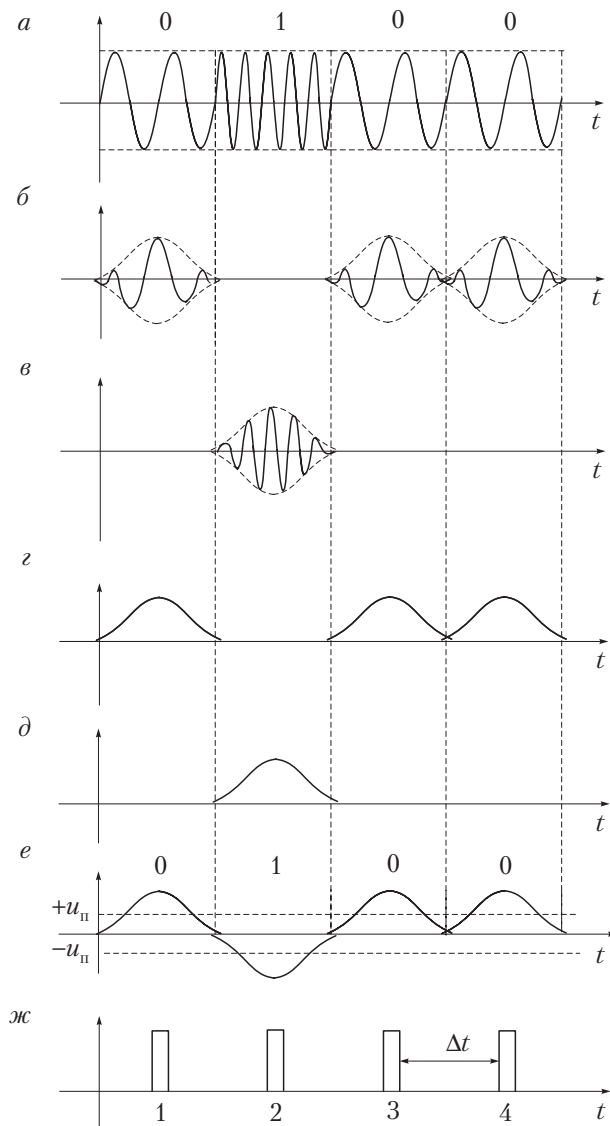


Рис. 7.18. Временные диаграммы, поясняющие работу неоптимального приемника ЧМ сигнала

Потери возникают за счет неиспользования информации о фазе принимаемого сигнала (эта информация безвозвратно теряется при амплитудном детектировании), неиспользования информации о положении максимума напряжения на выходе ФНЧ, применения полосовых фильтров вместо согласованных.

7.5. Прием дискретных сообщений в каналах с рассеянием

Если на вход канала с рассеянием подается радиосигнал с постоянной амплитудой и начальной фазой, то на его выходе образуется более сложный сигнал. Этот сигнал, равный сумме нескольких флуктуирующих по амплитуде и начальной фазе сигналов, также является флуктуирующим. Причиной флуктуаций является распространение радиосигнала по нескольким направлениям и нестабильность среды, по которой распространяется этот сигнал. Вероятность ошибки при приеме дискретных сообщений можно уменьшить с помощью разнесенного приема. Возможными разновидностями разнесенного приема являются: 1) прием отдельных, наиболее интенсивных по амплитуде составляющих сигнала; 2) одновременный прием наиболее интенсивных составляющих сигнала.

При приеме отдельных сигналов используют две разнесенные в пространстве приемные антенны и переключатель (рис. 7.19), с помощью которого на вход приемника отбирают наиболее мощный сигнал. В случае если сигналы отличаются поляризацией, они

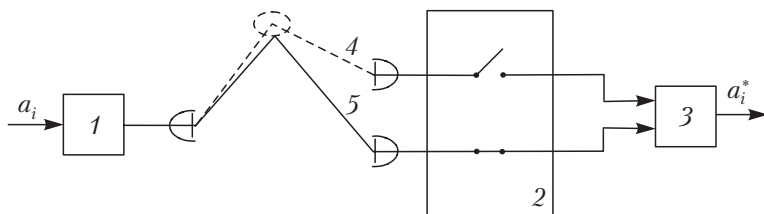


Рис. 7.19. Разнесенный в пространстве прием сигнала:
1 — передатчик; 2 — переключатель; 3 — приемник; 4, 5 — пути прохождения сигнала

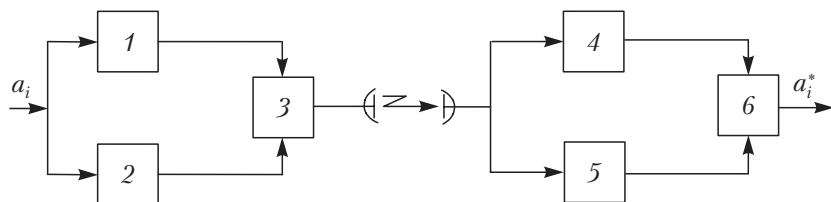


Рис. 7.20. Прием сигналов, разнесенных по частоте:

1, 2 — передатчики, работающие на разных частотах; 3 — сумматор сигналов; 4, 5 — приемники, работающие на разных частотах; 6 — блок выбора сигналов

могут быть приняты двумя антеннами с разной поляризацией. Иногда одну и ту же информацию передают одновременно на разных частотах (рис. 7.20), используя два передатчика и два приемника. С помощью блока выбора определяют наиболее интенсивный сигнал, который и определяет оценку передаваемой информации.

Для повышения качества информации двоичные символы передаваемых последовательностей могут повторяться. В этом случае в приемнике реализуется метод накопления, связанный с суммированием результатов обработки нескольких принятых символов и принятием решения о переданном символе.

Прием флуктуирующего сигнала, равного сумме модулированных информационными послылками ШС с применением корреляторов и согласованных фильтров, позволяет уменьшить влияние флуктуаций и тем самым увеличить помехоустойчивость за счет суммирования энергий наиболее интенсивных сигнальных составляющих.

Это суммирование возможно для сжимающихся во времени шумоподобных сигналов.

Принцип разделения поясняется на примере приема двух лучей (рис. 7.21). На входе согласованного фильтра присутствует сумма двух ШС, одинаковых по форме, но отличающихся по амплитуде и задержке (рис. 7.21, б). Каждый из этих сигналов имеет длительность, равную τ_n , одинаковую несущую частоту и один и тот же закон модуляции фазы. Фаза равна или 0, или π в течение длительности τ_0 одного элемента двоичной псевдослучайной последовательности $a(t)$, кодированной кодовой последовательностью 111-1-11-1 (рис. 7.21, а).

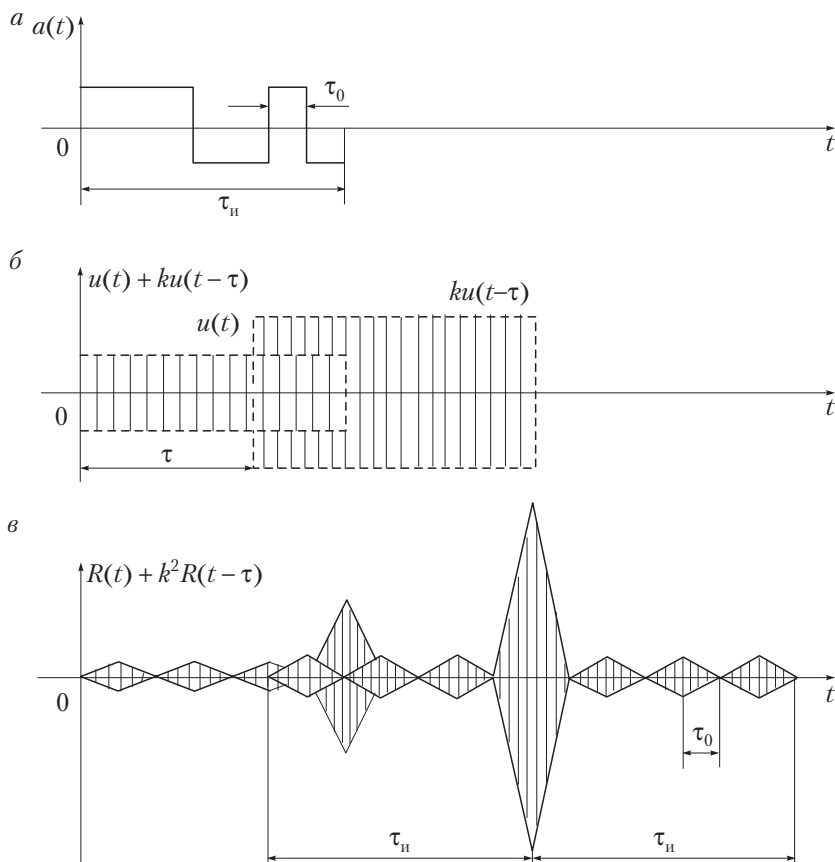


Рис. 7.21. Разделение двух лучей с помощью шумоподобных сигналов

Сигнал на выходе согласованного фильтра равен сумме двух сдвинутых во времени и отличающихся масштабом автокорреляционных функций ШС (рис. 7.21, в). Каждая функция состоит из основного (наибольшего) ромбовидного радиоимпульса и дополнительных ромбовидных импульсов, которые меньше основного. Максимальные значения амплитуд ромбовидных радиоимпульсов равны, соответственно, энергиям входных сигналов, а длительность каждого ромбовидного радиоимпульса на уровне, равном половине их амплитуд, равна τ_0 (длительности одного элемента двоичной псевдослучайной последовательности).

Если дополнительные ромбовидные импульсы, которые называются остатками, пренебрежимо малы, то сигналы на выходе согласованного фильтра будут определяться только основными ромбовидными радиоимпульсами. При этом длительности сигналов на входе и выходе согласованного фильтра будут неравными. Длительности сигналов на выходе будут меньше. Этот эффект называется *сжатием* сигналов *во времени*. Сжатием обладает только часть используемых в системах связи сигналов. К числу таких сигналов, например, относятся кодофазомодулированные сигналы. В качестве кодовых последовательностей в этом случае используются коды Баркера, M -последовательности и др.

Для эффективного разделения откликов согласованного фильтра, как это видно из рис. 7.21, *в*, необходимо уменьшить длительность τ_0 одного элемента псевдослучайной последовательности. Чем меньше эта длительность, тем лучше будут различаться сигналы. Но это потребует более широкой полосы канала связи. Кроме того, из возможных кодофазомодулированных сигналов следует применять такие сигналы, у которых боковые остатки меньше. Перечисленные требования лучше удовлетворяются с ростом базы ШС.

Суммирование энергий возможно как при когерентном, так и при некогерентном приеме. При некогерентном приеме требования к точности синхронизации опорного сигнала существенно снижаются. Если при когерентном приеме синхронизация должна осуществляться с погрешностью, которая составляет малую часть периода высокочастотного заполнения автокорреляционной функции, то при некогерентном приеме эта погрешность должна составлять малую часть времени формирования одного символа кодовой последовательности τ_0 . Впервые способ суммирования энергий был реализован в системе «Rake» при приеме телеграфных сигналов.

7.6. Борьба с импульсными, сосредоточенными и межсимвольными помехами



Для уменьшения влияния помех на качество передачи сообщений используют мероприятия по их подавлению в местах возникновения и по защите каналов связи от их проникновения, а также

решают задачу по выбору структуры системы связи и ее отдельных узлов и блоков при проектировании.

Для защиты каналов от проникновения помех совершенствуют аппаратуру связи, уменьшая как влияние внешних помех, так и взаимные помехи между соседними каналами. В радиосвязи эту задачу решают рациональным выбором несущих частот передатчиков с учетом их расположения на местности и условий распространения радиоволн. Вопросы взаимного влияния различных систем друг на друга изучаются в теории электромагнитной совместимости.

При разработке мероприятий по подавлению помех учитывают рекомендации международного союза электросвязи: МСЭ-Т (сектор стандартизации электросвязи) и МСЭ-Р (сектор радиосвязи).

Рассмотрим кратко некоторые способы подавления помех, связанные с рациональным выбором сигналов и методами их обработки.

Из известных методов защиты от импульсных помех отметим метод академика А.Н. Щукина, основанный на ограничении импульсной помехи в широкополосном тракте приемника и узкополосной фильтрации ограниченного по уровню сигнала. Система, в которой применяется этот принцип, получила название ШОУ (широкополосный фильтр, ограничитель, узкополосный фильтр).

Другой известный способ борьбы с импульсными помехами основан на отключении канала приемника на время действия помех.

Для борьбы с узкополосными помехами применяют также частотно-разнесенный прием, когда одинаковая информация передается в соседних частотных участках диапазона. При приеме к устройству обработки и решающему устройству подключаются только те частотные участки, которые не поражены сосредоточенными помехами. Межсимвольные помехи ослабляют выбором формы сигнала, структуры демодулятора и скорости передачи дискретной информации.

Достаточно эффективной мерой защиты от импульсных и сосредоточенных помех является разнесенный по времени и частоте прием сигнала. Из ветвей частотного разнесения выбирают те, которые не подвержены воздействию сосредоточенных помех, а из ветвей временного разнесения выбирают не пораженные импульсными помехами ветви. Поскольку помехи появляются в заданных

участках диапазона и интервалах времени случайным образом, выбор ветвей производится автоматически. При этом структура приемника адаптируется, приспособливается к присутствующим помехам. Такой прием называется *адаптивным*.

Для борьбы с импульсными, сосредоточенными и межсимвольными помехами применяют также ШС.

Применение ШС в сочетании с использованием оптимальных методов их обработки позволяет успешно решать задачу борьбы с межсимвольными помехами. Использование ШС и оптимальных методов их обработки на фоне помех позволяет успешно вести борьбу также с импульсными и сосредоточенными помехами. Импульсная и сосредоточенная помехи при прохождении через коррелятор или согласованный фильтр существенно ослабляются. Отношение сигнал/помеха при этом возрастает в B раз (B — база сигнала).

Вместе с корреляционной обработкой или согласованной фильтрацией ШС для борьбы с сосредоточенными помехами в ряде случаев применяют и предварительную фильтрацию смеси сигнала шума и помехи режекторным фильтром. С помощью этого фильтра «вырезают» ту часть спектральных компонент, которые перекрываются узкополосными помехами, а по оставшейся части спектра ШС восстанавливают переданную информацию.

7.7. Помехоустойчивость приема дискретных сигналов

7.7.1. Потенциальная помехоустойчивость приема двоичных сигналов, известных точно

При поэлементном приеме равновероятных двоичных сигналов, известных точно, $u_1(t)$, $u_2(t)$ на фоне нормального белого шума алгоритм обработки определяется неравенством (7.18). Если в смеси $z(t)$ содержится первый сигнал, то оно запишется в виде

$$\int_0^{\tau_n} [u_1(t) + N(t)]u_{\Delta}(t)dt > 0,5(E_1 - E_2), \quad (7.38)$$

где $u_{\Delta}(t) = u_1(t) - u_2(t)$.

После преобразований неравенство (7.38) примет вид

$$\int_0^{\tau_n} N(t)u_{\Delta}(t)dt > -0,5(E_1 + E_2) + \int_0^{\tau_n} u_1(t)u_2(t)dt.$$

При его выполнении принимается верное решение о принятом сигнале $u_1(t)$, а при невыполнении возникает ошибка. Вероятность принятия ошибочного решения определяется вероятностью следующего события: значение корреляционного интеграла меньше некоторой заданной величины λ , т.е.

$$\xi = \int_0^{\tau_n} N(t)u_{\Delta}(t)dt < \lambda = -0,5(E_1 + E_2) + \int_0^{\tau_n} u_1(t)u_2(t)dt.$$

Эта вероятность равна условной вероятности $P(u_2/u_1)$, поскольку предполагается, что в смеси сигнала и шума $z(t)$ присутствует сигнал $u_1(t)$. Докажем это, вычисляя вероятность ошибки:

$$p = P(u_1)P(u_2/u_1) + P(u_2)P(u_1/u_2).$$

Если $P(u_1) = P(u_2) = 0,5$, $P(u_2/u_1) = P(u_1/u_2)$, то $p = P(u_2/u_1)$.

Условные вероятности являются количественными оценками событий (переходов) в дискретном канале связи, если в этом канале присутствуют помехи (см. п. 5.2.5). В двоичном канале символ 0 может перейти в символ 1, а символ 1 — в символ 0.

Условные вероятности зависят от ряда факторов:

- математической модели канала;
- вида обработки смеси сигнала и шума;
- законов распределения сигнала и шума;
- пороговых уровней, которые зависят от характеристик источника и сигнала и др.

Вычислим значения вероятности ошибки для различных случаев приема сигналов.

По условию в канале присутствует реализация нормального белого шума с корреляционной функцией

$$M\{N(t)N(t')\} = \frac{N_0}{2}\delta(t - t').$$

Поскольку интегральное преобразование является линейным, случайная величина ξ также подчиняется нормальному закону.

Среднее значение случайной величины ξ равно нулю, так как среднее значение белого шума равно нулю. Дисперсия случайной величины

$$\begin{aligned}
 D(\xi) &= M \left\{ \left[\int_0^{\tau_n} N(t) u_{\Delta}(t) dt \right]^2 \right\} = \\
 &= \int_0^{\tau_n} \int_0^{\tau_n} M[N(t)N(t')] u_{\Delta}(t) u_{\Delta}(t') dt dt' = \frac{N_0}{2} E_{\Delta}, \quad (7.39) \\
 E_{\Delta} &= \int_0^{\tau_n} u_{\Delta}^2(t) dt.
 \end{aligned}$$

При вычислении дисперсии принято во внимание фильтрующее свойство дельта-функции.

Зная закон распределения случайной величины ξ и уровень порога λ , нетрудно найти выражение для вероятности ошибки:

$$p = \int_{-\infty}^{\lambda} w(x) dx = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx.$$

Удвоенное значение вероятности ошибки

$$2p = 1 - \int_{-\lambda}^{\lambda} w(x) dx = 1 - 2 \int_0^{\lambda} w(x) dx.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 p &= 0,5 \left[1 - 2 \int_0^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx \right] = \\
 &= 0,5 \left[1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\lambda/\sigma} e^{-y^2/2} dy \right] = 0,5 \left[1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right) \right],
 \end{aligned}$$

где $\Phi\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\lambda/\sigma} e^{-y^2/2} dy$ — функция Крампса.

Из возможных сигналов, известных точно, рассмотрим двоичные АМ, ЧМ и ФМ сигналы с одинаковой энергией E .

Для АМ сигнала: $u_{\Delta}(t) = u_1(t)$, так как $u_2(t) = 0$, поэтому $\lambda = 0,5E$.

Для ЧМ сигнала

$$u_{\Delta}(t) = u_1(t) - u_2(t), \quad \int_0^{\tau_n} u_1(t)u_2(t)dt = 0, \quad \lambda = E.$$

Для ФМ сигнала

$$u_2(t) = -u_1(t), \quad \lambda = 2E.$$

Учитывая значения для уровней порога, запишем выражения для вероятностей ошибок.

Для АМ сигнала: $E_s = E$, $\sigma = \sqrt{N_0 E/2}$, а вероятность ошибки

$$p = \frac{1}{2}[1 - \Phi(h/\sqrt{2})], \quad (7.40)$$

где $h = \sqrt{E/N_0}$.

Для ЧМ сигнала: $E_s = 2E$, $\sigma = \sqrt{N_0 E}$,

$$p = \frac{1}{2}[1 - \Phi(h)]. \quad (7.41)$$

Для ФМ сигнала: $E_s = 4E$, $\sigma = \sqrt{2N_0 E}$,

$$p = \frac{1}{2}[1 - \Phi(\sqrt{2}h)]. \quad (7.42)$$

Из выражений для вероятностей ошибок следует, что наилучшие результаты по критерию минимальной вероятности ошибки обеспечиваются для ФМ сигнала. Переход от системы с ФМ сигналом к системам с ЧМ и АМ сигналами ухудшает помехоустойчивость.

Для получения одинаковых вероятностей ошибки в системе с ЧМ сигналом нужно увеличить энергию сигнала в 2 раза, а в системе с АМ сигналом — в 4 раза. Следовательно, при использовании ФМ сигнала передатчик излучает меньшую среднюю мощность по сравнению с ЧМ и АМ сигналами.

Выражение для вероятности ошибки при приеме сигнала с однократной ОФМ, известного точно, найдем на основании оценки вероятностей следующих двух несовместимых событий: первое событие реализуется, если знак данного элемента воспроизведен приемником ошибочно, а знак предыдущего — верно; второе

событие реализуется, если знак данного элемента воспроизведен приемником верно, а предыдущего — ошибочно. Каждое из этих событий имеет вероятность $p_{\text{ФМ}}(1 - p_{\text{ФМ}})$. Поэтому

$$p_{\text{ОФМ}} = 2p_{\text{ФМ}}(1 - p_{\text{ФМ}}) = 0,5[1 - \Phi^2(\sqrt{2}h)]. \quad (7.43)$$

Пусть требуется воспроизводить символы с весьма малой ошибкой. В этом случае $p_{\text{ФМ}} \ll 1$ и

$$p_{\text{ОФМ}} = 2p_{\text{ФМ}} = 1 - \Phi(\sqrt{2}h). \quad (7.44)$$

«Платой» за устранение обратной работы, как следует из последнего выражения, является удвоение вероятности ошибки по сравнению со случаем приема ФМ сигналов.

Пример 7.4. В двоичном симметричном канале без памяти (канал от выхода АЦП до входа ЦАП) включен оптимальный приемник радиосигнала. В смеси сигнала мощностью P_c и нормального белого шума с нулевым средним значением и мощностью $P_{\text{ш}}$ присутствует модулированный информационными посылками ШС, известный точно.

Записать выражения для параметра обнаружения, если модуляция ШС осуществляется информационными посылками или по амплитуде, или по фазе (знаку). Кодовое слово, определяющее закон формирования ШС, построено из элементов 0, 1 при АМ и из элементов 1, -1 при ФМ.

Решение. Вероятность ошибки при приеме модулированного по амплитуде информационными посылками ШС определяется параметром обнаружения $h = \sqrt{E/N_0}$ [см. формулу (7.40)].

Энергия кодированного элементами 0, 1 сигнала равна

$$mP_c\tau_0 = m0,5A^2\tau_0,$$

где m — число 1 в периоде кодовой последовательности; A — амплитуда сигнала; τ_0 — длительность передачи одного символа этой последовательности.

Мощность шума, приходящаяся на единицу полосы,

$$N_0 = P_{\text{ш}}/\Delta f_c = 0,5P_{\text{ш}}\tau_0,$$

где $\Delta f_c = 2/\tau_0$ — ширина спектра шумоподобного сигнала.

Подставляя значения для энергии сигнала и спектральной плотности мощности шума в формулу для параметра обнаружения, получим

$$h = \sqrt{0,5mA^2\tau_0/(0,5P_{\text{ш}}\tau_0)} = \sqrt{2mP_c/P_{\text{ш}}}.$$

Параметр обнаружения АМ ШС сигнала можно увеличить, если кодовое слово, определяющее ШС, строить из символов 1, -1. Это позволит увеличить помехоустойчивость приема АМ ШС сигнала.

Вероятность ошибки при приеме модулированного по фазе информационными посылками шумоподобного сигнала также определяется только параметром обнаружения [см. формулу (7.42)].

Энергия кодированного элементами $-1, 1$ сигнала

$$NP_c\tau_0 = N0,5A^2\tau_0,$$

где N — период; A — амплитуда сигнала; τ_0 — длительность передачи одного символа кодовой последовательности.

Мощность шума, приходящаяся на единицу полосы,

$$N_0 = P_{\text{ш}}/\Delta f_c = 0,5P_{\text{ш}}\tau_0.$$

Подставляя значения для энергии сигнала и спектральной плотности мощности шума в формулу для параметра обнаружения, получим

$$h = \sqrt{0,5NA^2\tau_0/(0,5P_{\text{ш}}\tau_0)} = \sqrt{2NP_c/P_{\text{ш}}}.$$

7.7.2. Помехоустойчивость оптимального приема одного из m сигналов, известных точно

Оптимальный прием в целом одного из m сигналов, известных точно, на фоне нормального белого шума позволяет воспроизводить двоичное слово блока, передаваемое по дискретно-непрерывному каналу с минимальной вероятностью ошибки. Структурная схема оптимального приемника, приведенная на рис. 7.1 (см. с. 303), используется при анализе приема дискретного ЧМ сигнала, модулированного по форме ШС и посылок сигнала с многократной ОФМ.

Вероятность принятия ошибочного решения оптимальным приемником при приеме одного из m сигналов, известных точно:

$$p_{\text{ош}} = 1 - p_{\text{п}},$$

где $p_{\text{п}}$ — вероятность принятия правильного решения.

Вероятность принятия правильного решения определяется вероятностью следующего события: значение случайных величин ξ_j , вычисленных корреляторами с номерами $j \neq i$ в схеме, приведенной на рис. 7.1, меньше значения $\xi_i = z$, вычисленного коррелятором с номером i .

Пусть сигналы $u_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$, ортогональны и имеют одинаковые энергии. Можно доказать, что при приеме ортогональных

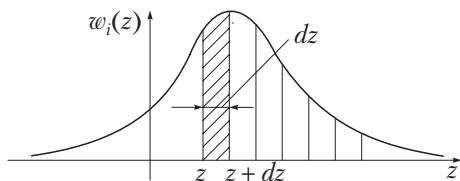


Рис. 7.22. Плотность вероятности случайной величины

сигналов случайные величины $\xi_j, j = 1, 2, \dots, m$, статистически независимы. Поэтому вероятность того, что все $(m - 1)$ случайные величины окажутся меньше z , равна

$$[P(\xi_j < z)]^{m-1}, \quad j \neq i.$$

Вероятность того, что случайная величина ξ_i находится в пределах от z до $(z + dz)$, равна $w_i(z)dz$, где $w_i(z)$ — плотность распределения вероятности случайной величины ξ_i (рис. 7.22).

Величина ξ_i независима по отношению ко всем величинам $\xi_j, j \neq i$, поэтому вероятность события, заключающегося в том, что $\xi_j < z$ ($j \neq i$), а ξ_i находится в интервале dz , равна

$$dP = [P(\xi_j < z)]^{m-1} w_i(z) dz.$$

Так как случайная величина ξ_i может лежать в пределах любого бесконечно малого значения dz (рис. 7.22), то вероятность того, что значения случайных величин $\xi_j, j \neq i$, будут меньше значения $\xi_i = z$, определяется выражением

$$p_{ii} = \int_{-\infty}^{\infty} dP = \int_{-\infty}^{\infty} [P(\xi_j < z)]^{m-1} w_i(z) dz. \quad (7.45)$$

При условии приема сигнала на фоне нормального белого шума с нулевым средним значением плотность распределения вероятности $w_i(z)$ подчиняется нормальному закону со средним значением, равным энергии сигнала E , и дисперсией, равной $N_0 E / 2 = \sigma^2$:

$$w_i(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(z-E)^2/(2\sigma^2)}. \quad (7.46)$$

Случайные величины $\xi_j, j \neq i$, также подчинены нормальному закону с нулевым средним значением и дисперсией $N_0 E / 2 = \sigma^2$. Поэтому вероятность

$$P(\xi_i < z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx. \quad (7.47)$$

Подставляя выражения (7.46), (7.47) в формулу (7.45), получим

$$p_{\text{п}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - V(\sqrt{2E/N_0} + y)]^{m-1} e^{-y^2/2} dy, \quad (7.48)$$

где

$$V(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2/2} dt.$$

Интеграл в формуле (7.48) можно вычислить, если использовать приближенные методы.

Результаты расчетов приведены на рис. 7.23 в виде графиков зависимостей

$$1 - p_{\text{п}} = p_{\text{ош}} = f(h_0^2),$$

где

$$h_0^2 = h^2 / \log m.$$

Обозначим аргумент h_0^2 буквой α и для $m = 2^k$ ортогональных сигналов запишем:

$$\alpha = h_0^2 = h^2 / \log m = E / (N_0 \log m) = E_0 / N_0,$$

где $E_0 = E/k$, k — длина информационного блока.

Коэффициент α равен отношению энергии, которая тратится на передачу одного бита информации, к спектральной плотности мощности шума. Очевидно, что чем меньше это отношение, тем более эффективно используется энергия сигнала в системе передачи информации. Найдем минимальное значение α .

Скорость передачи двоичной информации R связана с энергией E соотношением

$$E_0 = E/k = P_c k \tau_{\text{и}} / k = P_c / R,$$

где P_c — мощность сигнала; $\tau_{\text{и}}$ — длительность информационного символа.

Используя формулу Шеннона, запишем неравенство:

$$R/F < \log[1 + E_0 R / (N_0 F)].$$

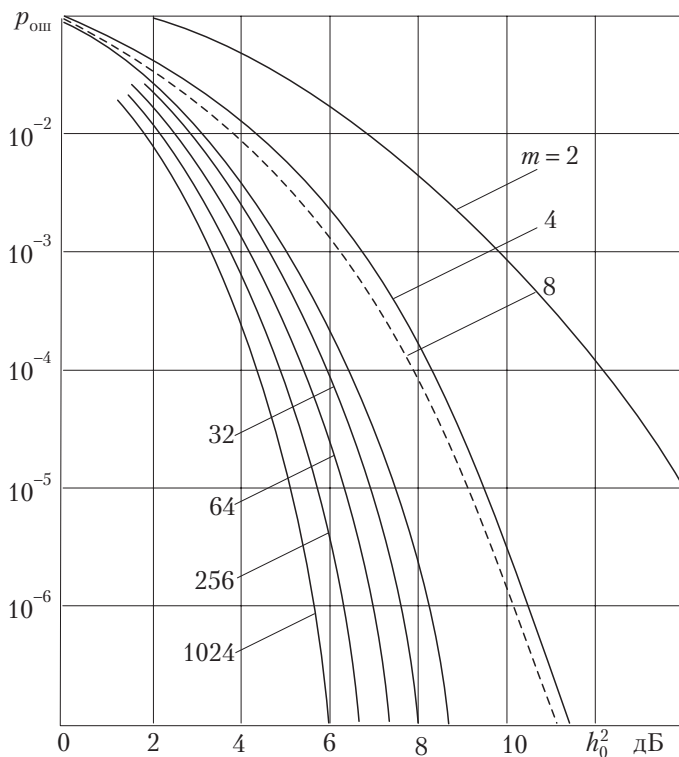


Рис. 7.23. Зависимость вероятности ошибки от отношения h_0^2 при приеме m ортогональных сигналов, известных точно

Отношение $R/F = \gamma$ характеризует эффективность использования полосы канала связи. С учетом этого перепишем неравенство в виде

$$\gamma < \log(1 + \alpha\gamma).$$

Неравенство можно записать также в виде

$$2^\gamma < 1 + \alpha\gamma.$$

Следовательно,

$$\alpha > \frac{2^\gamma - 1}{\gamma}.$$

Таким образом, с ростом значения γ коэффициент α неограниченно увеличивается, а с уменьшением значения γ этот коэффициент уменьшается. В пределе, если $\gamma \rightarrow 0$, то $\alpha \rightarrow \ln 2 = 0,693$. Действительно,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{d}{d\gamma} [(2^\gamma - 1)/\gamma] = \lim_{\gamma \rightarrow 0} 2^\gamma \ln 2 = \ln 2.$$

Для ортогональных сигналов с одинаковым параметром обнаружения уменьшение величин γ и α возможно за счет увеличения числа этих сигналов. Для известных классов ортогональных сигналов (последовательностей Уолша, Д-последовательностей и др.), используемых для передачи информации, их число равно $m = 2^k$, где k — длина информационного блока, равная 1, 2, 3, Для этих сигналов

$$\alpha = \frac{E}{N_0 \log 2^k} = \frac{E}{N_0 k}.$$

С ростом длины блока растет число используемых сигналов, а коэффициент α падает. В пределе при стремлении числа сигналов к бесконечности имеем оптимальную в смысле К. Шеннона систему связи.

Анализ зависимостей, приведенных на рис. 7.23, позволяет сделать следующий вывод: системы ортогональных сигналов при одинаковой вероятности ошибки отличаются удельной энергией, которая тем меньше, чем больше число этих сигналов.

Например, если $p_{\text{ош}} = 10^{-5}$, а число используемых сигналов $m = 32$, то выигрыш в удельной энергии по сравнению со случаем использования только двух сигналов ($m = 2$) равен двум. Это дает возможность упростить передатчик системы за счет уменьшения его мощности. Однако сложность приемников возрастает за счет увеличения числа корреляторов или согласованных фильтров. Усложняются при этом и каналы связи из-за необходимости увеличения ширины полосы.

При относительно больших отношениях сигнал/шум формулу (7.48) можно привести к следующему приближенному равенству:

$$p_{\text{п}} \approx 1 - \frac{m-1}{2} [1 - \Phi(h)].$$

Отсюда выражение для вероятности ошибки

$$p_{\text{ош}} \approx \frac{m-1}{2} [1 - \Phi(h)]. \quad (7.49)$$

Последняя формула совпадает с формулой (7.41), если $m = 2$.

Математическое описание приема в целом неортогональных сигналов, известных точно, на фоне нормального белого шума отличается от математического описания приема в целом ортогональных сигналов. Поэтому формулы для вероятностей ошибок этих сигналов также различаются.

Например, вероятность ошибки при приеме сигнала с многократной ФМ и известного точно, если требуется воспроизводить слово блока с весьма малой ошибкой, определяется выражением

$$P_{\text{ФМ}} \approx 0,5 \left[1 - \Phi \left(\sqrt{2} h \sin \frac{\pi}{2^k} \right) \right],$$

где k — длина блока; h — параметр обнаружения, равный $\sqrt{E/N_0}$; E — энергия сигнала; N_0 — мощность шума, приходящаяся на единицу полосы.

Вероятность ошибки при приеме сигнала с многократной ОФМ и известного точно равна

$$P_{\text{ОФМ}} = 2P_{\text{ФМ}} \approx 1 - \Phi \left(\sqrt{2} h \sin \frac{\pi}{2^k} \right), \quad (7.50)$$

где k — кратность сигнала.

С ростом кратности сигнала с ОФМ вероятность ошибки увеличивается.

Пример 7.5. В канале используется многоканальный приемник m ортогональных, двоичных, фазомодулированных, шумоподобных сигналов, известных точно. Модуляционный код определен. Каждому двоичному слову блока информационной последовательности ставится номер ШС. Такой вид модуляции называется модуляцией ШС по форме.

Время передачи одного информационного символа равно $\tau_{\text{и}}$. Время передачи двоичного слова блока равно произведению числа символов k в блоке на время передачи одного информационного символа $\tau_{\text{и}}$. Это время, равное $k\tau_{\text{и}}$, равно времени передачи одного периода $N\tau_0$ для ШС. Отношение сигнал/шум на входе приемника $P_{\text{с}}/P_{\text{ш}} = 1$.

Вычислить вероятности ошибок для двух случаев, если длины информационных блоков равны 2 и 3.

Решение. Вероятности ошибки определяются по формуле (7.49). Число каналов $m = 2^k$, энергия сигнала $E = P_c k \tau_n$, мощность шума, приходящаяся на единицу полосы, $N_0 = P_{ш}/\Delta f$. Ширина полосы, определяемая длительностью τ_0 одного символа ШС, $\Delta f = 2N/(k\tau_n)$.

Параметр обнаружения

$$h = \sqrt{E/N_0} = \sqrt{2NP_c k \tau_n / (P_{ш} k \tau_n)} = \sqrt{2NP_c / P_{ш}}.$$

Для $k = 2$, $N = 2^k = 4$:

$$h = \sqrt{2NP_c / P_{ш}} = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 1} = \sqrt{8} = 2,83.$$

Вероятность ошибки равна 0,00705.

Для $k = 3$, $N = 2^k = 8$:

$$h = \sqrt{2NP_c / P_{ш}} = \sqrt{2 \cdot 8 \cdot 1} = 4.$$

Вероятность ошибки равна 0,0002.

Помехоустойчивость приема ортогональных сигналов, известных точно, как это следует из полученных результатов, увеличивается с увеличением числа m ортогональных сигналов.

Пример 7.6. Для исходных данных примера 7.5 найти вероятности ошибок воспроизведения двоичных символов на выходах оптимальных приемников.

Решение. Учитывая определение канала связи, приведенное в § 1.2, а также математическую модель дискретного канала связи (см. п. 5.2.5), можно заключить, что двоичный сигнал, реализующийся в виде оценок слов блока, является в то же время сигналом в двоичном симметричном канале без памяти.

Событие, заключающееся в появлении ошибки в этом канале, однозначно связано с появлением ошибки при воспроизведении двоичного слова блока. Вероятности этих событий равны. Вероятность первого события равна сумме вероятностей появления ошибок кратности $q = 1, 2, 3, \dots, k$:

$$\sum_{q=1}^k p(q) = \sum_{q=1}^k C_k^q p^q (1-p)^{k-q},$$

где вероятность $p(q)$ определяется формулой (5.15).

Вероятность второго события определяется вероятностью ошибки распознавания одного из $m = 2^k$ двоичных слов блока

$$p_{\text{ош}} = 1 - p_{\text{п}},$$

где $p_{\text{п}}$ — вероятность принятия правильного решения [см. формулу (7.49)].

Приравнявая выражения для вероятностей указанных выше событий, получим уравнение, решение которого определит выражение для вероятности ошибки воспроизведения двоичного символа в двоичном симметричном канале без памяти. Решение уравнения возможно для большого отношения сигнал/шум. В этом случае можно считать маловероятным появление ошибок с кратностью $q > 1$, а при вычислении вероятности ошибки распознавания пользоваться формулой (7.49).

Вероятность того, что в блоке из k символов произойдет одна ошибка,

$$p(1) = C_k^1 p(1-p)^{k-1} = kp(1-p)^{k-1},$$

где $C_k^1 = \frac{k!}{(k-1)!} = k$.

Приравняв эту вероятность к вероятности распознавания одного из $m = 2^k$ двоичных слов, получим равенство

$$kp(1-p)^{k-1} = \frac{2^k - 1}{2} [1 - \Phi(h)].$$

Для малых значений p : $1 - p \approx 1$, поэтому

$$p = \frac{2^k - 1}{2k} [1 - \Phi(h)] = p_{\text{ош}}/k.$$

Подставляя численные значения вероятностей ошибок, полученные в примере 7.5, в последнюю формулу, найдем вероятности ошибок воспроизведения двоичных символов на выходах оптимальных приемников:

$$p_1 = p_{\text{ош}}/2 = 0,0035; \quad p_2 = p_{\text{ош}}/3 = 0,00007.$$

7.7.3. Помехоустойчивость оптимального приема дискретных сигналов с неизвестными (случайными) начальными фазами

К числу ортогональных сигналов со случайными начальными фазами относятся дискретные ЧМ сигналы, а также ШС, модулированные по форме и кодированные последовательностями Уолша, Д-последовательностями и другими ортогональными последовательностями (см. п. 7.3.1).

Вероятность ошибки при приеме (распознавании) этих сигналов

$$P_{\text{ош}} = \frac{m-1}{2} e^{-h^2/2}, \quad (7.51)$$

где $m = 2^k$, $k = 1, 2, 3, \dots$; h — параметр обнаружения.

Для $m = 2$ формула (7.51) определяет вероятность распознавания двоичного ЧМ сигнала со случайной начальной фазой, а также вероятность распознавания одной из двух форм ШС со случайной начальной фазой, модулированного по форме ($k = 1$).

К числу неортогональных сигналов относятся сигналы с многократной ОФМ. Вероятность ошибки при оптимальном приеме этих сигналов увеличивается с ростом их кратности.

Минимальная вероятность ошибки реализуется в оптимальном приемнике, который предназначен для некогерентного приема сигнала с однократной ОФМ (см. структурную схему на рис. 7.16). Эта вероятность

$$P_{\text{ош}} = 0,5e^{-h^2}, \quad (7.52)$$

где h — параметр обнаружения.

Сравнивая вероятность ошибки (7.52) с вероятностью ошибки при оптимальном некогерентном приеме двоичного ЧМ сигнала (см. формулу (7.51) для $m = 2$), находим, что вероятность ошибки при оптимальном некогерентном приеме сигнала с однократной ОФМ меньше при одинаковых значениях параметра обнаружения.

7.7.4. Помехоустойчивость оптимального приема амплитудно-модулированного сигнала с неизвестной (случайной) начальной фазой

При оценке помехоустойчивости этого вида приема учитываются: условия и ограничения, которые накладываются на сигнал и шум; выбранная модель канала, а также алгоритм оптимальности приемника. Этот алгоритм определяется неравенством (7.35). Для рассматриваемого случая $u_1(t) \neq 0$, $u_2(t) = 0$, $E_2 = 0$, поэтому неравенство записывается в виде

$$\ln I_0 \left(\frac{2AM}{N_0} \right) > \frac{E}{N_0}.$$

Структура оптимального приемника, построенная по этому неравенству, содержит всего один канал. В этом приемнике вычисляется число по формуле, которая записана в левой части неравенства,

а затем оно сравнивается с заранее известным числом, которое определяется правой частью этого неравенства. При превышении порога $\lambda = E/N_0$ на выходе приемника формируется символ 1, в противном случае — символ 0. Таким образом, при приеме двоичного АМ сигнала со случайной начальной фазой решается задача обнаружения сигнала.

Двоичный канал, связанный с решением этой задачи, является несимметричным из-за неравенства переходных вероятностей. Условная вероятность $P(1/0)$ вычисляется с помощью формулы (4.43), а условная вероятность $P(0/1)$ — с помощью формулы (4.44). Вероятность ошибки воспроизведения символов на выходе обнаружителя, зависящая от этих вероятностей,

$$p = P(1)P(0/1) + P(0)P(1/0), \quad (7.53)$$

где

$$P(0/1) = 1 - e^{-\frac{E}{N_0}} \int_{\alpha}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} I_0(\sqrt{2E/N_0} y) dy,$$

$$P(1/0) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}};$$

$\alpha = u_0/\sigma$ — относительный уровень порога, равный отношению значения порогового напряжения к среднеквадратичному значению шума.

По формулам для условных вероятностей в работе [5] рассчитаны кривые зависимостей $P(0/1) = f[P(1/0)]$ для различных отношений сигнал/шум E/N_0 . Первая вероятность называется *вероятностью пропуска сигнала*, вторая — *вероятностью ложной тревоги*. Кривые зависимостей вероятностей пропуска сигнала от вероятностей ложной тревоги называются *характеристиками обнаружения сигнала*. Эти характеристики позволяют рассчитать необходимые параметры обнаружителя.

Для расчетов при больших отношениях сигнал/шум можно пользоваться также следующей формулой [5]:

$$E/N_0 = \left(\sqrt{\ln[1/P(1/0)]} + \sqrt{\ln[1/P(0/1)] - 1,4} \right)^2. \quad (7.54)$$

Эта формула связывает значения переходных вероятностей в двоичном несимметричном канале без памяти с пороговым уровнем $\lambda = E/N_0$ в оптимальном приемнике.

Для расчета вероятности ошибки можно пользоваться и формулой

$$p = \frac{1}{2} \left\{ 0,5 \left[1 - \Phi \left(\frac{h}{\sqrt{2}} \right) \right] + e^{-h^2/4} \right\},$$

где $\Phi(x)$ — функция Крампа.

При больших отношениях сигнал/шум функция Крампа равна 1 и формула для вероятности ошибки:

$$p = \frac{1}{2} e^{-h^2/4}. \quad (7.55)$$



7.8. Оптимальный прием непрерывных сообщений

7.8.1. Показатели качества передачи

Непрерывное сообщение $a(t)$ является некоторой случайной реализацией, изменяющейся во времени. Сигнал, совпадающий с точностью до постоянной величины с этим сообщением, называется первичным сигналом. Первичный сигнал $b(t)$ передается по каналу связи или непосредственно (передача речи в тональном канале), или преобразуется модулятором (передача речи в радиовещании, передача речи и изображения в телевидении, передача непрерывного сообщения цифровыми методами в цифровой системе передачи).

При передаче речи по тональному каналу

$$b(t) = ka(t),$$

где k — коэффициент пропорциональности.

В радиовещании и телевидении первичные сигналы преобразуются в модулированные сигналы $u[t, p(t)]$, зависящие от времени и модулируемых параметров $p(t)$, причем

$$p(t) = cb(t),$$

где c — коэффициент пропорциональности. Для простоты примем $c = 1$.

При передаче по каналу связи на сигнал накладывается помеха $N(t)$. Для аддитивной помехи сумма сигнала и шума

$$z(t) = u[t, b(t)] + N(t).$$

Задачей приемника является выделение первичного сигнала с минимальной ошибкой.

Мерой помехоустойчивости, как упоминалось в гл. 1, является среднеквадратичное отклонение или средний квадрат ошибки:

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{T} \int_0^T [b^*(t) - b(t)]^2 dt. \quad (7.56)$$

Разность $\varepsilon(t) = b^*(t) - b(t)$ между принимаемым и передаваемым первичными сигналами является помехой на выходе приемника. Поэтому величина среднеквадратичной погрешности $\varepsilon^2(t) = P_{\Pi}$ является в то же время и мощностью этой помехи. Мощность первичного сигнала равна $P_b = b^2(t)$. Вместо среднеквадратичного отклонения часто используют другой показатель — отношение мощности сигнала к мощности помехи (шума) на выходе приемника:

$$\rho_{\text{вых}} = P_b / P_{\Pi}.$$

Если отношение сигнал/шум на входе приемника равно $\rho_{\text{вх}} = P_c / P_{\text{ш}}$, то отношение

$$g = \rho_{\text{вых}} / \rho_{\text{вх}} = \frac{P_b}{P_{\Pi}} \bigg/ \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} = \frac{P_b}{P_c} \bigg/ \frac{P_{\Pi}}{P_{\text{ш}}} \quad (7.57)$$

характеризует выигрыш (или проигрыш) в помехоустойчивости того или иного способа обработки сигнала.

Полезным показателем является также *обобщенный выигрыш*:

$$g' = \frac{\rho'_{\text{вых}}}{\rho'_{\text{вх}}} = \frac{g}{\alpha}, \quad (7.58)$$

где $\rho'_{\text{вых}} = \frac{P_b}{P_{\Pi}/F_c}$; F_c — ширина спектра сообщения; $\rho'_{\text{вх}} = \frac{P_c}{P_{\text{ш}}/F}$; F — ширина спектра сигнала; $\alpha = F/F_c$.

7.8.2. Прием сигнала, модулированного сообщением

Сообщение на отрезке передачи $[0, T]$ определяется реализацией некоторого случайного процесса.

Полагая, что первичный сигнал совпадает с передаваемым сообщением, представим его в виде ряда Фурье

$$\begin{aligned} b(t) &= b_m \sum_{i=m_1}^{m_2} \left(\sqrt{2} \lambda_{2i-1} \sin \frac{2\pi i}{T} t + \sqrt{2} \lambda_{2i} \cos \frac{2\pi i}{T} t \right) = \\ &= b_m \sum_{k=1}^v \lambda_k \varphi_k(t), \end{aligned} \quad (7.59)$$

где b_m — максимальное значение сообщения; i — целые числа ряда от m_1 до m_2 ; λ_k — коэффициенты разложения; $\varphi_k(t)$ — базисные функции типа $\sin x$, $\cos x$.

Число коэффициентов разложения равно

$$v = 2(m_2 - m_1 + 1) = 2F_c T,$$

где F_c — ширина спектра первичного сигнала.

Сигнал на выходе передатчика зависит от времени и модулируемого параметра, т.е. является функцией $u[t, b(t)]$. С учетом соотношения (7.59) выражение для сигнала может быть записано в виде функции времени и коэффициентов разложения, которые на отрезке $[0, T]$ остаются постоянными и от отрезка к отрезку меняются случайным образом:

$$u[t, b(t)] = u(t, \bar{\lambda}), \quad \bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v).$$

Задача оптимального приемника в этом случае сводится к задаче совместной оценки значений этих коэффициентов. При отсутствии шума оценки совпадают с коэффициентами разложения, т.е. $\bar{\lambda}^* = \bar{\lambda}$. При приеме сигнала на фоне шума $\bar{\lambda}^* \neq \bar{\lambda}$. В результате оценка сообщения:

$$b^*(t) = \sum_{k=1}^v (\lambda_k + \Delta\lambda_k) \varphi_k(t) = b(t) + \varepsilon(t), \quad (7.60)$$

где $\Delta\lambda_k = \lambda_k^* - \lambda_k$; $\varepsilon(t)$ — погрешность воспроизведения сообщения.

Оптимальный приемник вычисляет апостериорную плотность распределения вероятности и на основе одного из критериев (например, *критерия максимума функции правдоподобия*) определяет наиболее вероятную реализацию. Критерий максимума функции правдоподобия записывается в виде

$$w(\bar{x}/y) = cw(\bar{y}/\bar{x}) = ce^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - u(t, \bar{\lambda})]^2 dt} = ce^{-TR/N_0} = \max,$$

где c — постоянное число;

$$R = \frac{1}{T} \int_0^T [z(t) - u(t, \bar{\lambda})]^2 dt.$$

Найдем максимум функции правдоподобия, вычисляя частные производные этой функции по коэффициентам разложения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v$. В результате получим систему уравнений:

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda_k} = \frac{2}{T} \int_0^T [z(t) - u(t, \bar{\lambda})] \frac{\partial u(t, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_k} dt = 0, \quad (7.61)$$

где $k = 1, 2, \dots, v$.

Решая полученную систему уравнений, можно найти структуру оптимального приемника и спектральную плотность мощности помехи на его выходе.

Если коэффициент разложения λ_k мало отличается от наиболее вероятного значения, то выражение для сигнала можно записать в виде

$$\begin{aligned} u(t, \bar{\lambda}) &= u(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k_n}, \dots, \lambda_v) + (\lambda_k - \lambda_{k_n}) \frac{\partial u(t, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_k} \Big|_{\lambda_k = \lambda_{k_n}} = \\ &= u(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k_n}, \dots, \lambda_v) + \Delta \lambda_k \frac{\partial u(t, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_k} \Big|_{\lambda_k = \lambda_{k_n}}. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Подставляя (7.62) в (7.61) и полагая, что

$$\frac{\partial u(t, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial u(t, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_k} \Big|_{\lambda_k = \lambda_{k_n}},$$

получим

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left(N(t) - \Delta\lambda_k \frac{\partial u(t, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_k} \Big|_{\lambda_k = \lambda_{kH}} \right) \frac{\partial u(t, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_k} dt = 0,$$

$$\Delta\lambda_k = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T N(t) \frac{\partial u(t, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_k} dt}{\frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial u(t, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_k} \right]^2 dt} = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T N(t) D_k(t) dt}{\bar{D}_k^2},$$

где

$$D_k(t) = \frac{\partial u(t, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_k}, \quad \bar{D}_k^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial u(t, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_k} \right]^2 dt.$$

Среднеквадратичное значение ошибки при воспроизведении некоторого k -го коэффициента разложения равно

$$M(\Delta\lambda_k^2) = \frac{\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T M\{N(t)N(t')\} D_k(t) D_k(t') dt dt'}{\bar{D}_k^4} = \frac{N_0}{2T\bar{D}_k^2},$$

где $M\{N(t)N(t')\} = \frac{N_0}{2} \delta(t - t')$ — корреляционная функция шума на выходе приемника.

Из последнего выражения определяется спектральная плотность мощности помехи на выходе оптимального приемника, с помощью которой можно определить *потенциальную верность передачи*

$$G(f) = N_0 / \bar{D}_k^2. \quad (7.63)$$

Эта формула найдена с учетом следующего. Спектральная составляющая на частоте $f_k = k/T$ равна сумме случайных квадратурных составляющих [см. формулу (7.59)]. Дисперсии этих составляющих одинаковы и равны $N_0 / (2T\bar{D}_k^2)$.

Следовательно, дисперсия помехи на частоте f_k равна $N_0 / (T\bar{D}_k^2)$. Поскольку соседние спектральные компоненты первичного сигнала

отстоят друг от друга на величину, равную $1/T$, то спектральная плотность мощности помехи на выходе приемника определяется выражением (7.63). Оно находится делением дисперсии помехи на частоте f_k на частотный интервал $1/T$.

7.8.3. Сравнительная оценка помехоустойчивости систем передачи непрерывных сообщений

Для сравнительной оценки систем связи с различными видами модуляции воспользуемся выражением (7.63).

Ненормированное сообщение $b(t)$ имеет среднюю мощность

$$P_b = \overline{b^2(t)} = b_m^2 \overline{b_0^2(t)} = b_m^2 / \Pi^2,$$

где $b_0(t) = b(t)/b_m$, $\Pi = b_m / \sqrt{P_b}$, $b_0^2(t) = P_b / b_m^2 = 1/\Pi^2$.

Отношение максимального значения сообщения к корню квадратному от мощности этого сообщения называется *пик-фактором сообщения*.

Если сообщение нормировано, то $b_m = 1$ и $P_b = 1/\Pi^2$. Отношение мощностей сигнала и шума на выходе приемника

$$\rho_{\text{вых}} = \frac{P_b}{P_{\epsilon}} = \frac{1}{\Pi^2 \int_0^{F_c} G(f) df}, \quad (7.64)$$

где $[0, F_c]$ — ширина спектра непрерывного сообщения.

Сравним системы связи с различными видами модуляции. АМ сигнал с большим уровнем несущей равен

$$u[t, b(t)] = A \left[1 + \frac{b(t)}{A} \right] \cos \omega_0 t.$$

Найдем частную производную от этого сигнала:

$$D_k(t) = \frac{\partial u[t, b(t)]}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial u[t, b(t)]}{\partial b(t)} \frac{\partial b(t)}{\partial \lambda_k} = (\cos \omega_0 t) b_m \varphi_k(t).$$

Если $\varphi_k(t) = \sqrt{2} \cos \Omega_k t$, где $\Omega_k = 2\pi k/T$, то

$$D_k(t) = \frac{b_m}{\sqrt{2}} [\cos(\omega_0 - \Omega_k)t + \cos(\omega_0 + \Omega_k)t].$$

Среднее значение от квадрата производной

$$\begin{aligned}\bar{D}_k^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T D_k^2(t) dt = \frac{b_m^2}{2} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega_0 - \Omega_k) t dt + \\ &+ \frac{b_m^2}{2} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega_0 + \Omega_k) t dt \approx \frac{b_m^2}{2} = \frac{m^2 A^2}{2}.\end{aligned}$$

Спектральная плотность помехи на выходе приемника определяется с помощью формулы (7.63)

$$G(f) = 2N_0/(m^2 A^2). \quad (7.65)$$

Подставляя выражение (7.65) в отношение (7.64), получим

$$\rho_{\text{вых}} = \frac{m^2 A^2}{2\Pi^2 N_0 F_c}. \quad (7.66)$$

Из формулы (7.66) следует, что, помимо очевидного способа повышения верности передаваемого сообщения, при АМ имеется и другой способ, связанный с уменьшением пик-фактора передаваемого сообщения. Обычно это достигается сжатием динамического диапазона при передаче и обратным преобразованием при приеме.

Выигрыш в помехоустойчивости определяется отношением

$$g = \frac{\rho_{\text{вых}}}{\rho_{\text{вх}}} = \frac{2m^2}{\Pi^2 + m^2}, \quad (7.67)$$

так как мощность входного АМ сигнала

$$P_c = 0,5A^2[1 + m^2/\Pi^2],$$

а мощность шума в полосе, равной $2F_c$, составит $2N_0F_c$. Обобщенный выигрыш

$$g' = \frac{g}{\alpha} = \frac{m^2}{m^2 + \Pi^2}, \quad (7.68)$$

так как $\alpha = 2$.

АМ сигнал с подавленной несущей $u[t, b(t)] = b(t)\cos\omega_0 t$. Частная производная от этого сигнала

$$D_k(t) = \frac{\partial u[t, b(t)]}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial u[t, b(t)]}{\partial b(t)} \frac{\partial b(t)}{\partial \lambda_k} = (\cos\omega_0 t) b_m \varphi_k(t).$$

Средний квадрат производной

$$\bar{D}_k^2(t) = \frac{b_m^2}{T} \int_0^T \varphi_k^2(t) \cos^2 \omega_0 t dt \approx \frac{b_m^2}{2}.$$

Спектральная плотность мощности шума на выходе приемника

$$G(f) = \frac{N_0}{D_k^2} = \frac{2N_0}{b_m^2}.$$

Отношение сигнал/шум на выходе приемника

$$\rho_{\text{вых}} = \frac{b_m^2}{2\Pi^2 N_0 F_c}. \quad (7.69)$$

Мощность сигнала на входе приемника

$$P_c = \frac{1}{T} \int_0^T b^2(t) \cos^2 \omega_0 t dt \approx \frac{b_m^2}{2\Pi^2}.$$

Мощность шума на входе приемника

$$P_{\text{ш}} = 2N_0 F_c.$$

Отношение сигнал/шум на входе приемника

$$\rho_{\text{вх}} = \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} = \frac{b_m^2}{4\Pi^2 N_0 F_c}. \quad (7.70)$$

Выигрыш в помехоустойчивости

$$g = \frac{\rho_{\text{вых}}}{\rho_{\text{вх}}} = 2. \quad (7.71)$$

Относительный выигрыш

$$g' = \frac{g}{\alpha} = 1. \quad (7.72)$$

При АМ-ОБП сигнал определяется выражением

$$u[t, b(t), b^*(t)] = \frac{b(t)}{2} \cos \omega_0 t + \frac{b^*(t)}{2} \sin \omega_0 t, \quad (7.73)$$

где $b(t)$ — первичный сигнал, определяемый выражением (7.59); $b^*(t)$ — сопряженный по Гильберту первичный сигнал, определяемый выражением

$$b^*(t) = b_m \sum_{k=1}^v \lambda_k \varphi_k^*(t),$$

где $\varphi_k^*(t)$ — сопряженная по Гильберту базисная функция.

Выражение (7.73) находится обратным преобразованием Фурье спектральной плотности АМ-ОБП сигнала, определяемой формулой (3.39).

Частная производная от сигнала (7.73)

$$\begin{aligned} D_k(t) &= \frac{\partial u[t, b(t), b^*(t)]}{\partial \lambda_k} = \\ &= \frac{\partial u[t, b(t), b^*(t)]}{\partial b(t)} \frac{\partial b(t)}{\partial \lambda_k} + \frac{\partial u[t, b(t), b^*(t)]}{\partial b^*(t)} \frac{\partial b^*(t)}{\partial \lambda_k} = \\ &= 0,5(\cos \omega_0 t) b_m \varphi_k(t) + 0,5(\sin \omega_0 t) b_m \varphi_k^*(t). \end{aligned}$$

Пусть $\varphi_k(t) = \sqrt{2} \cos \Omega_k t$, где $\Omega_k = k \frac{2\pi}{T}$.

В этом случае сопряженная по Гильберту функция

$$\varphi_k^*(t) = \sqrt{2} \sin \Omega_k t,$$

а частная производная

$$D_k(t) = \frac{b_m}{\sqrt{2}} [\cos \Omega_k t \cos \omega_0 t + \sin \Omega_k t \sin \omega_0 t] = \frac{b_m}{\sqrt{2}} \cos(\omega_0 - \Omega_k)t.$$

Средний квадрат частной производной

$$\bar{D}_k^2(t) = \frac{b_m^2}{2} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega_0 - \Omega_k)t dt \approx \frac{b_m^2}{4}.$$

Спектральная плотность мощности шума на выходе приемника

$$G(f) = \frac{N_0}{\bar{D}_k^2} = \frac{4N_0}{b_m^2}.$$

Отношение сигнал/шум на выходе приемника

$$\rho_{\text{вых}} = \frac{b_m^2}{4\Pi^2 N_0 F_c}. \quad (7.74)$$

Мощность сигнала на входе приемника

$$\begin{aligned} P_c &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{b^2(t)}{4} \cos^2 \omega_0 t dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{b^{*2}(t)}{4} \sin^2 \omega_0 t dt \approx \\ &\approx \frac{b_m^2}{8} \frac{1}{T} \int_0^T b_0^2(t) dt + \frac{b_m^2}{8} \frac{1}{T} \int_0^T b_0^{*2}(t) dt = \frac{b_m^2}{8\Pi^2} + \frac{b_m^2}{8\Pi^2} = \frac{b_m^2}{4\Pi^2}. \end{aligned}$$

Мощность шума на входе приемника

$$P_{\text{ш}} = N_0 F_c.$$

Отношение сигнал/шум на входе приемника

$$\rho_{\text{вх}} = \frac{b_m^2}{4\Pi^2 N_0 F_c}. \quad (7.75)$$

Выигрыш в отношении сигнал/шум

$$g = \frac{\rho_{\text{вых}}}{\rho_{\text{вх}}} = 1. \quad (7.76)$$

Относительный выигрыш

$$g' = 1. \quad (7.77)$$

Непрерывный ЧМ сигнал определяется выражением

$$u[t, \psi(t)] = A \cos[\omega_0 t + \Delta\omega \psi(t)],$$

где

$$\psi(t) = \int b_0(t) dt = \int \sum_{k=1}^v \lambda_k \phi_k dt;$$

A — огибающая сигнала; $\Delta\omega = 2\pi k b_m$ — девиация частоты.

Частотная производная

$$D_k(t) = \frac{\partial u[t, \psi(t)]}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial u[t, \psi(t)]}{\partial \psi(t)} \frac{\partial \psi(t)}{\partial \lambda_k},$$

где

$$\frac{\partial u[t, \psi(t)]}{\partial \psi(t)} = -A\Delta\omega \sin\left(\omega_0 t + \Delta\omega \int b_0(t) dt\right),$$

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial \lambda_k} = \int \varphi_k(t) dt = \sqrt{2} \int \sin \omega_k t dt = -\frac{1}{\omega_k} \sqrt{2} \cos \omega_k t.$$

Следовательно,

$$D_k = \sqrt{2}A(\Delta\omega/\omega_k) \left\{ \sin\left[\omega_0 t + \Delta\omega \int b_0(t) dt\right] \cos \omega_k t \right\}.$$

Средний квадрат от частной производной

$$\begin{aligned} \bar{D}_k^2(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \frac{\partial u[t, \psi(t)]}{\partial \lambda_k} \right\}^2 dt = \\ &= 2A^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_k} \right)^2 \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \left[\omega_0 t + \Delta\omega \int b_0(t) dt \right] \cos^2 \omega_k t dt \approx \frac{A^2}{2} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_k} \right)^2. \end{aligned}$$

Значение спектральной плотности мощности шума на частоте f_k

$$G(f_k) = N_0 / \bar{D}_k^2 = 2N_0 / A^2 \left(\frac{f_k}{\Delta f} \right)^2.$$

Спектральная плотность мощности шума

$$G(f) = 2 \frac{N_0}{A^2} \left(\frac{f}{\Delta f} \right)^2. \quad (7.78)$$

Мощность шума на выходе приемника

$$\int_0^{F_c} G(f) df = \frac{2N_0}{A^2(\Delta f)^2} \int_0^{F_c} f^2 df = \frac{2}{3} \frac{N_0}{A^2(\Delta f)^2} F_c^3,$$

где F_c — ширина спектра сообщения.

Отношение сигнал/шум на выходе приемника

$$\rho_{\text{вых}} = \frac{1}{\Pi^2 \int_0^{F_c} G(f) df} = \frac{3A^2}{\Pi^2 2N_0 F_c} \left(\frac{\Delta f}{F_c} \right)^2. \quad (7.79)$$

Мощность сигнала на входе приемника

$$P_c = \left(\frac{A}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{A^2}{2}.$$

Мощность шума на входе приемника

$$P_{ш} = 2N_0\Delta f.$$

Отношение сигнал/шум на входе приемника

$$\rho_{вх} = \frac{A^2}{4N_0\Delta f}.$$

Выигрыш в отношении сигнал/шум

$$g = \frac{\rho_{вых}}{\rho_{вх}} = \frac{3}{\Pi^2} m_{чМ}^2 \frac{2\Delta f}{F_c} = \frac{3}{\Pi^2} m_{чМ}^2 \alpha, \quad (7.80)$$

где $\alpha = 2\Delta f / F_c$, $m_{чМ} = \Delta f / F_c$.

Обобщенный выигрыш

$$g' = \frac{g}{\alpha} = \frac{3}{\Pi^2} m_{чМ}^2. \quad (7.81)$$

Рассмотрим передачу сообщения по непрерывному каналу связи. Сообщение является непрерывной реализацией нормального случайного процесса с равномерным спектром в полосе частот от 0 до F_c , в канале действует помеха в виде нормального шума с заданной спектральной плотностью. Мощности шума и сигнала в указанной полосе ограничены.

Передача сообщения по каналу связи с заданным отношением сигнал/шум P_b/P_ϵ возможна, согласно теореме Шеннона, в том случае, если производительность источника меньше пропускной способности канала:

$$H'_\epsilon(b) < C,$$

где $H'_\epsilon(b)$ — производительность источника; C — пропускная способность канала связи.

В идеальной системе связи $H'_\epsilon(b) = C$, поэтому

$$F_c \log \frac{P_b}{P_\epsilon} = F \log \left(1 + \frac{P_c}{P_{ш}} \right). \quad (7.82)$$

Принимая во внимание введенные ранее обозначения

$$F/F_c = \alpha; \quad P_c/P_\varepsilon = \rho_{\text{вых}}; \quad P_c/P_{\text{ш}} = \rho_{\text{вх}},$$

запишем формулу (7.82) в виде

$$\log \rho_{\text{вых}} = \alpha \log(1 + \rho_{\text{вх}}).$$

Из полученного равенства найдем

$$\rho_{\text{вых}} = (1 + \rho_{\text{вх}})^\alpha. \quad (7.83)$$

По формуле (7.83) на рис. 7.24 построены графики зависимостей $\rho_{\text{вых}} = f(\rho_{\text{вх}})$ для идеальных аналоговых систем связи с различными непрерывными сигналами и коэффициентами α . Графики идеальных систем начинаются из точки, координаты которой определяются значениями $\rho_{\text{вх}} = 0$, $\rho_{\text{вых}} = 1$.

Прямая линия 1 характеризует идеальную систему с АМ-ОБП сигналом и $\alpha = 1$. Кривая 3 характеризует идеальные системы с АМ-ПН и с АМ-БУН сигналами ($\alpha = 2$). Кривая 7 характеризует идеальную систему с ЧМ сигналом и большим индексом частотной модуляции ($\alpha = 2m_{\text{ЧМ}}$). Значения α для идеальных систем с ЧМ сигналами значительно больше значений α идеальных систем

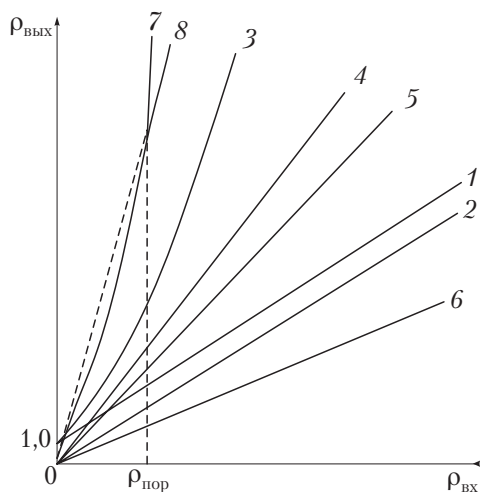


Рис. 7.24. Графики зависимостей отношения сигнал/шум на выходе от отношения сигнал/шум на входе для различных систем связи

с АМ сигналами. Поэтому прямая 1 и кривая 3 лежат на рис. 7.24 ниже кривой 7. Следовательно, для одинакового отношения сигнал/шум на входах этих систем отношение сигнал/шум на выходе идеальной системы с ЧМ сигналом будет больше отношений сигнал/шум на выходах идеальных систем с АМ сигналами.

Отметим, что графики 1, 3, 7 характеризуют потенциальный выигрыш в помехоустойчивости в аналоговых оптимальных системах, который в этих системах не реализуется.

Прямая линия 2, построенная по формуле (7.76) для оптимальной системы с АМ-ОБП сигналом, лежит ниже прямой 1. Прямые линии 4, 5, 6, построенные по формулам (7.71), (7.67), (7.67) для оптимальных систем с непрерывными сигналами АМ-ПН, АМ-БУН ($m \gg 1$), АМ-БУН ($m \ll 1$), лежат ниже кривой 3. Рабочий участок прямой линии 8, построенный по формуле (7.80) в интервале входного отношения сигнал/шум $[\rho_{\text{пор}}, \infty)$ для оптимальной системы с непрерывным ЧМ сигналом и большим индексом частотной модуляции, также лежит ниже значений кривой 7.

Положение прямых линий на рис. 7.24 позволяет по критерию выигрыша в помехоустойчивости $g = \rho_{\text{вых}}/\rho_{\text{вх}}$ расположить оптимальные системы в порядке увеличения выигрыша. Наихудшим показателем обладает оптимальная система с непрерывным АМ-БУН сигналом ($m \leq 1$) (прямая 6). За ней следуют оптимальные системы с АМ-ОБП сигналом (прямая 2), АМ-БУН ($m \gg 1$) сигналом (прямая 5) и АМ-ПН сигналом (прямая 4). Наилучший результат имеет оптимальная система с непрерывным ЧМ сигналом (прямая 8).

Оптимальные системы с непрерывными ЧМ сигналами обладают пороговым эффектом. В этих системах с уменьшением входного отношения сигнал/шум уменьшается и выходное отношение, но до тех пор, пока входное отношение не станет равным некоторому значению $\rho_{\text{пор}}$, которое называется *пороговым*. При $\rho_{\text{вх}} = \rho_{\text{пор}}$ выходное отношение $\rho_{\text{вых}} = 0$ и системы становятся непригодными для передачи информации из-за так называемых **аномальных ошибок**. Эти ошибки возникают при равенстве пиковых значений сигнала и помехи, что соответствует такому входному отношению, которое существенно больше порогового. Это означает, что имеется возможность совершенствования таких систем. Снижение указанного входного отношения сигнал/шум позволяет увеличить дальность связи, что актуально для спутниковых и космических систем.



7.9. Цифровые методы передачи непрерывных сообщений

7.9.1. Общие сведения о цифровых методах передачи. Помехоустойчивость цифровых методов передачи непрерывных сообщений

Цифровые методы передачи непрерывных сообщений включают:

- методы формирования и обработки сигналов на основе их отображения совокупностью чисел;

- методы передачи этой совокупности по каналу связи.

Теоретические основы цифровых методов формирования сигналов рассмотрены в гл. 3. Важное место в этой теории занимает метод представления сигналов обобщенным рядом Фурье, который устанавливает связь между сигналом и спектральными коэффициентами. Один и тот же сигнал, представленный разными базисными функциями, может иметь разные спектральные коэффициенты. В частном случае, когда в качестве базисных функций используются функции типа $(\sin x)/x$, спектральные коэффициенты определяются умножением отсчетных значений сигнала $u(k\Delta t)$ на $1/\sqrt{2F_B}$, а сигнал записывается в виде ряда Котельникова. Ранее показано, что отсчетные значения первичного сигнала преобразуются в двоичные числа в результате квантования отсчетных значений и затем кодирования соответствующих номеров уровней квантования. Таким образом, первичный сигнал, непосредственно связанный с непрерывным сообщением, отображается множеством двоичных чисел, над которыми производятся дальнейшие преобразования. В приемнике производятся обратные преобразования.

Формирование и обработка сигналов на основе их отображения совокупностью чисел называется соответственно, **цифровой генерацией** и **обработкой**.

Передачу двоичных чисел по каналу связи можно вести или непосредственно, без каких-либо существенных преобразований, или посредством дискретной модуляции.

Цифровые методы передачи обладают по сравнению с аналоговыми методами передачи более высокой помехоустойчивостью.

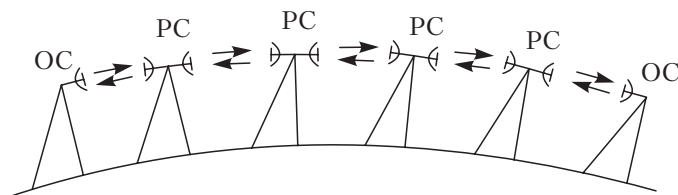


Рис. 7.25. Ретрансляция сигналов в радиорелейной линии связи:
РС — ретрансляционная станция; ОС — оконечная станция

Это наиболее полно проявляется при *многократной ретрансляции сигналов*.

Принцип ретрансляции сигналов, нашедший применение в кабельных и радиорелейных линиях, поясняется рис. 7.25 (на примере радиорелейной линии).

В аналоговых линиях передачи сигналы передаются по цепи ретрансляторов, содержащих приемно-передающее оборудование. С его помощью ослабленные по мощности сигналы принимаются и усиливаются, а затем передаются к следующему ретранслятору. При передаче возникают искажения, обусловленные влиянием линии на передаваемый сигнал и присутствием в ней различных помех. Мощность помехи на входе приемника оконечной станции равна сумме мощностей подобных помех на входах всех приемников, установленных на линии.

Пусть число ретрансляционных участков, определяемое из условия обеспечения надежной связи, равно m . В этом случае отношение сигнал/помеха на входе последнего приемника в m раз меньше отношения на входе первого. Сравнительно низкая помехоустойчивость, большая потребляемая мощность от источников питания, большие габариты оборудования привели к замене аналоговых линий цифровыми.

В цифровых системах (при том же числе ретрансляторов) более высокая верность передачи обеспечивается за счет *регенерации импульсов*. При этом их форма, искаженная средой распространения и аппаратурой канала связи, восстанавливается, а помехи накапливаются в гораздо меньшей степени. Полностью устранить влияние помех при регенерации сигналов в принципе невозможно. Это объясняется тем, что даже при весьма малом уровне помех существует не равная нулю вероятность ошибочного приема символов.

При наличии ошибки вместо символа 0 на выходе регенератора будет формироваться символ 1, а вместо символа 1 — символ 0.

Для уменьшения вероятности ошибки необходимо увеличить мощность передаваемого сигнала. С ростом числа ретрансляторов требуемая мощность также увеличивается. Однако по сравнению с переприемом сигналов в аналоговой линии верность передачи в цифровой линии во много раз больше. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 7.7. В канале с аддитивным гауссовым шумом и при некогерентном приеме двоичных ЧМ сигналов требуется обеспечить вероятность ошибки $p < 10^{-5}$:

- 1) в цифровой линии без регенерации сигналов;
- 2) в цифровой линии с регенерацией сигналов;
- 3) в аналоговой линии с ретрансляцией сигналов.

Все линии имеют одинаковую протяженность, а линии 2), 3) содержат $m = 1000$ ретрансляторов.

Решение. В цифровой системе без регенерации сигналов при заданной вероятности $p < 10^{-5}$ требуемое отношение h^2 определяется формулой (7.51):

$$h^2 = E/N_0 = -2\ln(2p) = 21,64.$$

В цифровой линии передачи с регенерацией сигналов и использованием $m + 1$ участков регенерации на каждом из них нужно обеспечить вероятность ошибки в $m + 1$ раз меньшую, равную 10^{-8} . Предполагается, что ошибки при первой, второй и т.д. регенерации сигнала — независимы. Поэтому общая вероятность ошибки равна сумме вероятностей ошибок, возникающих в первом, втором и т.д. регенераторах.

Вероятности ошибки $p = 10^{-8}$ соответствует отношение $h^2 \approx 35,34$. Следовательно, при одинаковой мощности шума, приходящейся на единицу полосы N_0 , мощность сигнала в цифровой линии с регенерацией сигнала в $35,45/21,64 = 1,64$ раза больше той мощности, которая необходима в цифровой системе без регенерации.

В аналоговой линии передачи с ретрансляцией сигналов на выходе первого ретранслятора сумма мощностей сигнала и помехи равна $P_c + P_{ш}$. Эта суммарная мощность при прохождении смеси сигнала и помехи по линии связи между первым и вторым ретранслятором уменьшается в несколько раз.

Для компенсации потерь сигнала его необходимо усилить в это же число раз. При усилении к имеющейся помехе будет добавляться помеха с такой же мощностью. Поэтому сумма мощностей сигнала и помехи на выходе второго ретранслятора равна $P_c + 2P_{ш}$.

Продолжив анализ, убеждаемся, что на выходе m -го ретранслятора сумма мощностей сигнала и помехи равна $P_c + mP_{ш}$. В аналоговой системе с ретрансляцией сигналов отношение сигнал/помеха ухудшается в $\rho_{вх}/\rho_{вых}$ раз, где $\rho_{вых} = P_c/(m+1)P_{ш}$, $\rho_{вх} = P_c/P_{ш}$.

Для данного примера ухудшение отношения сигнал/помеха в $m+1 \approx 1000$ раз.

7.9.2. Структурная схема системы передачи непрерывных сообщений цифровым способом

Структурная схема системы передачи непрерывных сообщений цифровым способом приведена на рис. 7.26.

Для согласования непрерывного источника с дискретным каналом связи на передающей стороне введен АЦП сигнала, а для согласования дискретного канала связи с получателем сообщения на приемной стороне введен цифроаналоговый преобразователь (ЦАП).

Сигнал с выхода АЦП поступает в передатчик. В зависимости от вида линии связи этот сигнал соответствующим образом преобразуется. Методы преобразований двоичных кодовых комбинаций в дискретные сигналы (АМ, ФМ, ОФМ, ЧМ) рассмотрены в гл. 3.

В приемнике двоичные кодовые комбинации после демодуляции и регенерации поступают на ЦАП, где преобразуются в значения амплитуд импульсов, которые затем фильтруются фильтром

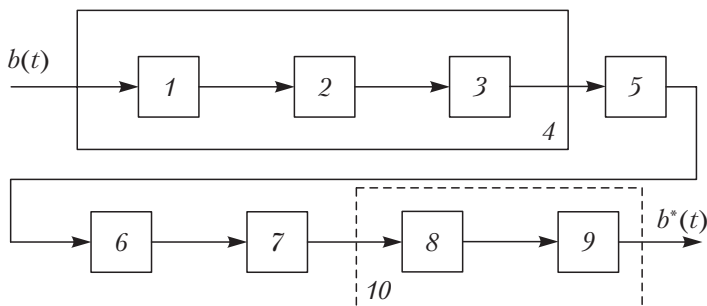


Рис. 7.26. Структурная схема цифровой системы передачи непрерывных сообщений:

- 1 — дискретизатор; 2 — квантователь; 3 — кодер; 4 — АЦП; 5 — передатчик;
6 — линия связи; 7 — приемник; 8 — декодер; 9 — ФНЧ; 10 — ЦАП

нижних частот для получения непрерывного сообщения. Теория дискретизации, квантования, а также восстановления первичного сигнала по его отсчетам рассматривалась в § 2.7, а также в пп. 3.8.3, 3.9.5.

7.9.3. Мощность шума квантования

Под шумом квантования понимают совокупность разностей

$$\varepsilon = \sum_k \Delta_k = \sum_k [b(k\Delta t) - b_d(k\Delta t)], \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

между отсчетными значениями первичного сигнала (сообщения) и ближайшими к этим значениям уровнями квантования. При равномерном квантовании, которое наиболее распространено на практике, значения шума не превосходят половины интервала квантования, т.е.

$$\varepsilon \leq 0,5\Delta b.$$

Если полный размах непрерывного первичного сигнала $b(t)$ равен $2b_m$, то число уровней квантования

$$L = \frac{2b_m}{\Delta b}. \quad (7.84)$$

Принято считать, что шум квантования распределен по равномерному закону в интервале от $-0,5\Delta b$ до $+0,5\Delta b$. Средняя мощность шума квантования

$$P_\varepsilon = M(\Delta_k^2) = \frac{1}{\Delta b} \int_{-\Delta b/2}^{\Delta b/2} x^2 dx = \frac{\Delta b^2}{12}. \quad (7.85)$$

Как показано выше (п. 7.8.3), средняя мощность ненормированного первичного сигнала (сообщения)

$$P_b = \frac{b_m^2}{\Pi^2},$$

где Π — пик-фактор сообщения.

Отношение сигнал/шум квантования

$$\frac{P_b}{P_\varepsilon} = \frac{b_m^2 12}{\Pi^2 (\Delta b)^2} \approx \frac{3L^2}{\Pi^2} = \frac{3 \cdot 2^{2n}}{\Pi^2}.$$

Это отношение зависит от числа уровней L квантования и от связанной с этим числом длины n двоичной кодовой комбинации. Выбором числа уровней квантования (числа разрядов n двоичного кода) можно снизить влияние шума квантования на верность передачи до минимума. Однако с увеличением числа разрядов увеличивается сложность ЦАП и АЦП. Увеличивается также и ширина спектра двоичного сигнала. Шум квантования можно уменьшить, применяя неравномерное квантование. Интервал квантования при этом увеличивается с ростом уровня входного сигнала и, если в непрерывном сообщении большие уровни встречаются реже, чем малые, то при усреднении дисперсия ошибки уменьшается.

7.9.4. Влияние помех на качество передачи сообщений

При приеме двоичные слова в ЦАП преобразуются в короткие импульсы, которые затем фильтруются фильтром нижних частот. Значение амплитуды k -го импульса определяет оценку уровня квантования в k -м интервале дискретизации:

$$b_d^*(k\Delta t) = (\Delta b) \sum_{i=1}^n \alpha_i^* 2^{i-1}, \quad (7.86)$$

где Δb — интервал квантования; n — число разрядов двоичного числа; $\alpha_i^* = \{0, 1\}$ — оценка символа двоичного числа.

Из формулы (7.86) следует, что оценка уровня квантования связана с переходами символов (букв) в двоичном канале и определяется качеством воспроизведения (оценки) этих символов.

Погрешность воспроизведения уровня квантования

$$\gamma_k = b_d^*(k\Delta t) - b_d(k\Delta t)$$

определяет шумовую составляющую на выходе канала. С учетом формулы (7.86) эта погрешность

$$\gamma_k = (\Delta b) \sum_{i=1}^n (\alpha_i^* - \alpha_i) 2^{i-1} = (\Delta b) \sum_{i=1}^n \beta_i 2^{i-1},$$

где $\alpha_i = \{0, 1\}$ — символ передаваемого двоичного слова, $\alpha_i^* = \{0, 1\}$ — оценка этого символа; $\beta_i = \alpha_i^* - \alpha_i$ (табл. 7.1).

Таблица 7.1

Возможные значения случайной величины β_i

α_i^*	α_i	
	0	1
0	0	-1
1	1	0

В таблице записанные по диагонали нулевые значения разности принятого и переданного символов соответствуют их безошибочному приему. Остальные значения разности, равные -1 , 1 , соответствуют приему символов с ошибкой.

Из табл. 7.1 следует, что событие, заключающееся в появлении разности $\beta_i = -1$, определяется совместным появлением событий $\alpha_i = 1$, $\alpha_i^* = 0$ с вероятностью $P(1)P(0/1)$, а событие, заключающееся в появлении разности $\beta_i = 1$, определяется совместным появлением событий $\alpha_i = 0$, $\alpha_i^* = 1$ с вероятностью $P(0)P(1/0)$. Сумма этих вероятностей определяет вероятность ошибки при передаче двоичного слова по двоичному симметричному каналу:

$$p_{\text{ош}} = P(0)P(1/0) + P(1)P(0/1),$$

где $P(0)$, $P(1)$ — априорные вероятности передачи символов 0 и 1 соответственно; $P(1/0)$, $P(0/1)$ — переходные вероятности.

Для двоичного симметричного канала

$$P(1/0) = P(0/1) = p,$$

поэтому

$$p_{\text{ош}} = P(0)p + P(1)p = p.$$

Математическое ожидание и дисперсия разности β_i при $P(0) = P(1)$ соответственно равны:

$$\begin{aligned} M(\beta_i) &= (-1)P(0/1)P(1) + 1P(1/0)P(0) = \\ &= -1 \cdot p \cdot 0,5 + 1 \cdot p \cdot 0,5 = 0, \\ M(\beta_i^2) &= (-1)^2 P(0/1)P(1) + (1)^2 P(1/0)P(0) = \\ &= p \cdot 0,5 + p \cdot 0,5 = p. \end{aligned}$$

Среднее значение шумовой составляющей при воспроизведении уровня (номера) квантования

$$M(\gamma_k) = (\Delta b) \sum_{i=1}^n M(\beta_i) 2^{i-1} = 0.$$

Дисперсия шумовой составляющей при воспроизведении уровня

$$M(\gamma_k^2) = (\Delta b)^2 M \left\{ \sum_{i=1}^n \beta_i 2^{i-1} \right\}^2 = p(\Delta b)^2 \sum_{i=1}^n 2^{2(i-1)}. \quad (7.87)$$

Последняя формула получена при условии, что ошибки приема различных символов независимы.

Дисперсия определяется вероятностью ошибки при приеме символов, и тем больше, чем больше эта вероятность.

7.9.5. Влияние квантования и помех на качество передачи сообщений

На качество передачи непрерывного сообщения цифровым методом влияет не только присутствующая в двоичном канале помеха, но и операция квантования в передатчике. Определим выражение среднеквадратичной погрешности воспроизведения сообщения, учитывающее не только помеху, но и операцию квантования.

Полагая, что первичный сигнал $b(t)$ является сигналом с ограниченным спектром, запишем выражение для среднеквадратичной погрешности с учетом формулы (2.57):

$$\bar{\epsilon}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \sum_{k=1}^n [b^*(k\Delta t) - b(k\Delta t)] \frac{\sin 2\pi F_B(t - k\Delta t)}{2\pi F_B(t - k\Delta t)} \right\}^2 dt,$$

где T — интервал времени, в течение которого передается сигнал; F_B — верхняя частота спектра этого сигнала; n — число отсчетных значений сигнала в интервале времени T , причем $n = T/\Delta t = 2F_B T$.

После преобразований подынтегрального выражения получим

$$\bar{\epsilon}^2 = \sum_{k=1}^n [b^*(k\Delta t) - b(k\Delta t)]^2 \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\sin 2\pi F_B(t - k\Delta t)}{2\pi F_B(t - k\Delta t)} \right]^2 dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^n \sum_{l=1}^n [b^*(k\Delta t) - b(k\Delta t)][b^*(l\Delta t) - b(l\Delta t)] \times \\
& \times \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\sin 2\pi F_B(t - k\Delta t)}{2\pi F_B(t - k\Delta t)} \frac{\sin 2\pi F_B(t - l\Delta t)}{2\pi F_B(t - l\Delta t)} dt.
\end{aligned}$$

С учетом свойств базисных функций (см. § 2.7) полученное выражение можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}^2 &= \frac{1}{2F_B T} \sum_{k=1}^n [b^*(k\Delta t) - b(k\Delta t)]^2 = \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [b^*(k\Delta t) - b(k\Delta t)]^2. \tag{7.88}
\end{aligned}$$

Из-за помех оценка уровня квантования $b^*(k\Delta t)$ отличается от уровня квантования $b_d(k\Delta t)$ на величину γ_k , т.е.

$$b^*(k\Delta t) = b_d(k\Delta t) + \gamma_k. \tag{7.89}$$

Из-за операции квантования отсчетное значение первичного сигнала отличается от уровня квантования на величину погрешности Δ_k :

$$b(k\Delta t) = b_d(k\Delta t) + \Delta_k. \tag{7.90}$$

Подставляя выражения (7.89) и (7.90) в равенство (7.88) и учитывая, что погрешности, возникающие в дискретном канале из-за помех и квантования, статистически независимы, получим

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\gamma_k - \Delta_k)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \gamma_k^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k^2 = \\
&= M\{\gamma_k^2\} + M\{\Delta_k^2\}. \tag{7.91}
\end{aligned}$$

С учетом формул (7.85) и (7.87) запишем окончательное выражение для среднеквадратичного отклонения:

$$\bar{\varepsilon}^2 = p(\Delta b)^2 \sum_{i=1}^n 2^{2(i-1)} + \frac{(\Delta b)^2}{12}. \tag{7.92}$$

При равномерном квантовании верность передачи определяется интервалом квантования Δb , вероятностью ошибки p и числом разрядов n двоичного кодового слова.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение оптимального приемника.
2. Запишите неравенства, определяющие структуру оптимального приемника дискретных сигналов, известных точно.
3. Запишите выражение для коэффициента передачи линейного фильтра, который согласован с заданным сигналом.
4. Запишите неравенства, определяющие структуру оптимального приемника дискретных сигналов со случайными начальными фазами.
5. Какими формулами выражается потенциальная помехоустойчивость при приеме двоичных АМ, ФМ, ОФМ и ЧМ сигналов, известных точно?
6. Какими формулами выражается потенциальная помехоустойчивость при приеме двоичных АМ, ОФМ и ЧМ сигналов со случайными начальными фазами?
7. Запишите формулу для вероятности ошибки при приеме одного из m ортогональных дискретных сигналов, известных точно.
8. Запишите формулу для вероятности ошибки при приеме одного из m ортогональных дискретных сигналов со случайной начальной фазой.
9. Назовите меры помехоустойчивости приема первичных аналоговых сигналов.
10. Чем объяснить пороговый эффект в широкополосных аналоговых системах связи с ЧМ сигналами? Почему пороговый эффект отсутствует в аналоговых системах связи с АМ-БУН, АМ-ПН, АМ-ОБП сигналами?
11. Назовите достоинства цифровых методов передачи непрерывных сообщений.



ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАЗДЕЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

8.1. Укрупненная структурная схема многоканальной системы связи



Системы связи называются **многоканальными**, если они обеспечивают передачу нескольких сообщений по одной общей линии связи. Многоканальная передача сообщений позволяет приблизить скорость передачи информации к пропускной способности линии связи. Очевидно, что суммарная производительность нескольких источников должна быть меньше пропускной способности линии связи, т.е.

$$\sum_{k=1}^N H'_k \leq C,$$

где C — пропускная способность; H'_k — производительность k -го источника; N — число источников.

На рис. 8.1 приведена укрупненная структурная схема многоканальной системы связи. В этой схеме первичные сигналы $a_1(t)$, $a_2(t)$, ..., $a_N(t)$, обычно имеющие одинаковые спектры, в *формирователе группового сигнала*, преобразуются в групповой сигнал путем линейного сложения модулированных канальных сигналов:

$$u(t) = \sum_{i=1}^N \bar{u}_i(t), \quad (8.1)$$

где $u(t)$ — *групповой сигнал*; $\bar{u}_i(t)$ — модулированные *канальные сигналы*, однозначно связанные с первичными сигналами; N — число каналов.

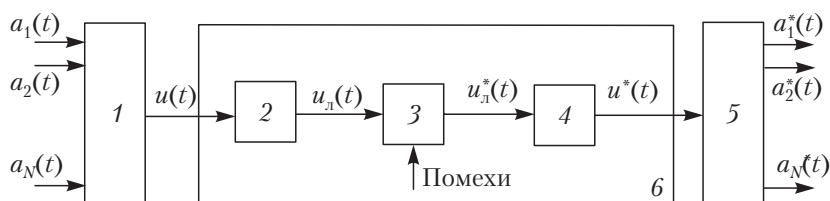


Рис. 8.1. Укрупненная структурная схема многоканальной системы связи:

1 — формирователь группового сигнала; 2 — передатчик; 3 — линия связи; 4 — приемник; 5 — селектор канальных сигналов; 6 — групповой канал

Этот способ формирования группового сигнала называется *раздельным способом уплотнения*. Он нашел широкое применение на практике ввиду простоты каналообразующего оборудования.

В зависимости от доступа к каналам передачи формирователи группового дискретного сигнала делятся на *синхронные* и *асинхронные*.

Синхронные формирователи обеспечивают параллельную или последовательную передачу информационных символов или блоков из них от отдельных синхронных источников с одинаковыми скоростями при помощи канальных дискретных сигналов.

При *параллельной* синхронной передаче информации по групповому каналу групповой сигнал на выходе формирователя этого сигнала состоит из суммы канальных сигналов. Начало и конец этих сигналов совпадает с началом и концом передаваемых по каналам информационных символов или блоков из них.

В интервале передачи информационных символов или блоков из них информационные параметры канальных сигналов остаются постоянными, а с переходом к очередному интервалу изменяются или остаются прежними в соответствии с передаваемой информацией.

При *последовательной* синхронной передаче информации информационные символы или блоки из них передают поочередно за синхросигналом в течение одинаковых интервалов времени.

Передача информации от несинхронных источников по синхронному групповому каналу требует использования согласующего устройства, включенного между выходами несинхронных источников и входами синхронного формирователя группового сигнала.

В *асинхронных* формирователях отдельные источники имеют свободный доступ в каналы, скорость передачи информации может варьироваться, отпадает необходимость в устройствах согласования между источниками и формирователями групповых сигналов.

Чтобы при приеме разделить групповой сигнал на каналные сигналы, необходимо за этими сигналами закрепить определенные признаки, а каналные приемники наделить чувствительностью к ним.

Признак сигнала — это значение его какого-то параметра, отличающее этот сигнал от других сигналов. При приеме по этому признаку производится отделение (селекция) канального сигнала от других канальных сигналов и его демодуляция с целью выделения передаваемого сообщения. Признаком радиосигнала может быть значение его амплитуды, начальной фазы, частоты и задержки. Если сигнал кодируется, то роль «параметра» в этом случае выполняет код, а признаком кодированного сигнала является кодовая последовательность этого кода. Так как кодовые последовательности любого кода являются упорядоченными в этом коде, т.е. имеют номер, то этот номер, так же как и кодовая последовательность с этим номером, может быть признаком кодированного сигнала. Признак сигнала определяет название линейного разделения сигналов: амплитудное, фазовое, временное, частотное, разделение сигналов по форме (кодовое разделение). *Амплитудное разделение*, использующее различие канальных сигналов по их уровням и нелинейные схемы, на практике не используется.

В передатчике групповой сигнал преобразуется в линейный сигнал $u_{\text{л}}(t)$ с целью согласования группового сигнала с параметрами линии связи (см. рис. 8.1).

В приемнике линейный сигнал $u_{\text{л}}^*(t)$ преобразуется в групповой сигнал $u^*(t)$. В селекторе канальных сигналов, который является многоканальным, из группового сигнала выделяются каналные сигналы $u_i^*(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, которые затем преобразуются в первичные сигналы $a_i^*(t)$.

8.2. Решение проблемы разделения сигналов в рамках теории оптимальных методов приема сигналов на фоне помех



Методы, разработанные в статистической теории связи, обеспечивают наилучшую в соответствии с заданным критерием оптимальности передачу сообщений в условиях действия помех от источника к получателю. Главные направления исследований связаны с синтезом оптимальной системы, включающей ее передающую и приемную части, и с оценкой качества передачи сообщений.

Проблема многоканальной связи имеет определенную специфику, связанную с присутствием на входе канального приемника, кроме полезного сигнала и различных помех (сосредоточенных по спектру, импульсных помех, флуктуационного нормального шума), специфической помехи в виде сигналов других каналов.

Для ряда случаев проблема оптимальной передачи сообщений проще решается в рамках теории оптимальных методов приема сигналов на фоне нормального белого шума. Это объясняется тем, что если в статистической теории связи оптимум ищут по всем допустимым видам сигналов и по всем возможным способам приема, то в теории оптимальных методов приема сигналов на фоне помех оптимум ищут в первую очередь по всем возможным способам приема для выбранного (обычно достаточно широкого) класса сигналов. Кроме того, теория оптимальных методов приема сигналов на фоне помех является наиболее разработанной. Ее готовые решения можно использовать не только для случая нормального белого шума, но и для других помех (сосредоточенных по спектру, импульсных и других помех), которые с помощью известного метода, предложенного В.А. Котельниковым, можно привести к нормальному белому шуму.

Эти решения можно с успехом использовать и в многоканальных системах связи. Отличительной особенностью приема сигналов в таких системах является то, что прием каждого канального сигнала реализуется не только на фоне нормального белого шума, но и на фоне других канальных сигналов, что создает специфическую *взаимную (переходную) помеху*, которая снижает качество воспроизводимого на выходе канального приемника сообщения.

На основании положений и выводов, полученных в теории оптимальных методов приема сигналов на фоне помех, формулируется цель разделения сигналов в многоканальных системах связи.

Целью разделения сигналов является обеспечение заданной верности передаваемых сообщений в условиях действия различных помех, включая взаимную помеху. Цель достигается:

- применением канальных сигналов с заданными свойствами и признаками;
- использованием оптимальных канальных приемников, синтезированных для приема сигналов на фоне нормального белого шума.



8.3. Условие линейного разделения сигналов

Первой работой, определившей развитие многоканальных систем связи, является опубликованная в 1935 г. работа Д.В. Агеева, в которой сформулировано условие линейного разделения сигналов и дано математическое описание избирательного свойства приемника.

Необходимым и достаточным условием разделения сигналов $\bar{u}_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, является условие их линейной независимости, заключающееся в том, что тождество

$$c_1 \bar{u}_1(t) + c_2 \bar{u}_2(t) + \dots + c_N \bar{u}_N(t) \equiv 0 \quad (8.2)$$

выполняется только в том случае, если все постоянные коэффициенты c_i в выражении (8.2) равны нулю.

Следовательно, сигналы являются линейно независимыми, если каждый из них не может быть образован линейной комбинацией других сигналов.

Избирательное свойство приемника выражается уравнением

$$L_j u(t) = L_j \sum_{i=1}^N \bar{u}_i(t) = \sum_{i=1}^N L_j \bar{u}_i(t) = \begin{cases} \bar{u}_j(t), & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (8.3)$$

где $u(t)$ — групповой сигнал, равный сумме канальных модулированных сигналов $\bar{u}_i(t)$; L_j — канальный оператор, определяющий линейное преобразование группового сигнала в j -м канальном приемнике, $j = 1, 2, \dots, N$ — номер канального приемника.

модулированных дискретных сигналов, скалярные произведения которых удовлетворяют условиям:

$$(\bar{u}_i, u_j) = 0, \quad i \neq j; \quad (8.5)$$

$$(\bar{u}_i, u_j) \neq 0, \quad i = j. \quad (8.6)$$

Каждая строка определителя Грама в этом случае состоит из $N - 1$ нулей и одного не равного нулю скалярного произведения. Например, в строке с номером j все скалярные произведения равны нулю, за исключением скалярного произведения $(\bar{u}_j, u_j)$. Поэтому по произведению значений скалярных произведений, стоящих на главной диагонали, легко определить, равен или не равен нулю определитель (8.4). При условии, что каналные сигналы удовлетворяют условию ортогональности, сигналы разделяются, если произведение скалярных произведений, стоящих на главной диагонали, не равно нулю.

С учетом формул (2.48), (2.52) одно из скалярных произведений, входящее в определитель (8.4), запишем в виде

$$(\bar{u}_i, u_j) = \int_0^T \bar{u}_i(t) u_j(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_j(jz) \bar{S}_i^*(jz) dz, \quad (8.7)$$

где T — время интегрирования произведения сигналов; $S_j(jz)$ — спектральная плотность опорного сигнала $u_j(t)$; $\bar{S}_i^*(jz)$ — комплексно сопряженная величина спектральной плотности модулированного сигнала $\bar{u}_i(t)$.

Время интегрирования при параллельной синхронной передаче информации по групповому каналу определяется видом модуляции. При двоичной АМ, однократной ОФМ время интегрирования равно времени передачи одного информационного символа. При многократной ОФМ, дискретной частотной модуляции или модуляции ШС по форме время интегрирования равно времени передачи информационного блока $k\tau_n$, где k — число передаваемых в этом блоке информационных символов, τ_n — длительность тактового интервала.

Скалярное произведение реализуется или с помощью последовательно соединенных коррелятора и электронного управляемого ключа, или с помощью последовательно соединенных согласован-

ного фильтра и аналогичного ключа. Поэтому выражение (8.4) определяет не только условие линейного разделения сигналов, но и структуру устройств, с помощью которых реализуется это разделение. Отметим, что в оптимальных приемниках, найденных для различных случаев приема сигналов на фоне нормального белого шума, обязательно содержатся устройства, вычисляющие скалярные произведения. Такие приемники называются *корреляционными приемниками* или *приемниками, построенными на согласованных фильтрах*.

В случае применения в многоканальных системах оптимальных приемников сумма откликов канального оптимального приемника с номером j на групповой сигнал равняется сумме скалярных произведений, входящих в j -ю строку матрицы (8.4).

Поскольку основные физические процессы в оптимальных приемниках описываются одинаковыми математическими выражениями, в дальнейшем исследуется только корреляционный прием и анализируются корреляционные приемники.

Рассмотрим случай применения в *синхронной многоканальной системе* связи двоичных АМ радиосигналов и сигналов с однократной ОФМ, известных точно. В каждом канале этой системы используется одноканальный оптимальный корреляционный приемник, а каналные сигналы различаются по частотному признаку.

Преобразование группового сигнала в оптимальном корреляционном одноканальном приемнике с номером j является линейным канальным оператором L_j , если на опорный вход умножителя, входящего в состав коррелятора, подается опорный сигнал $u_j(t)$ с таким признаком j , который позволяет выделять (селектировать) канальный модулированный сигнал $\bar{u}_i(t)$ на фоне других модулированных канальных сигналов $\bar{u}_i(t)$ с целью его детектирования.

Преобразование группового сигнала в одноканальном оптимальном приемнике с номером j , построенном на согласованном фильтре, также является линейным канальным оператором L_j , если этот фильтр согласован с сигналом $u_j(t)$ с таким признаком, который позволяет выделять (селектировать) канальный модулированный сигнал $\bar{u}_j(t)$ с этим же признаком на фоне других канальных сигналов с целью его детектирования.

Форма сигнала, с которым согласуется линейный фильтр, совпадает с формой опорного сигнала в корреляционном приемнике.

Определим действие линейного канального оператора L_j на левую часть равенства (8.2), полагая, что в многоканальной синхронной системе связи реализуется параллельная передача канальных сигналов. Имеем

$$\begin{aligned} c_1 L_j \bar{u}_1(t) + c_2 L_j \bar{u}_2(t) + \dots + c_N L_j \bar{u}_N(t) &= L_j \sum_{i=1}^N c_i \bar{u}_i(t) = \\ &= \sum_{i=1}^N c_i L_j \bar{u}_i(t) = c_j L_j \bar{u}_j(t) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N c_i L_j \bar{u}_i(t) \equiv 0. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Первое слагаемое в выражении (8.8) определяет результат преобразования собственного модулированного канального сигнала, известного точно, в одноканальном оптимальном приемнике с номером j :

$$c_j L_j \bar{u}_j(t) = c_j \int_0^T \bar{u}_j(t) u_j(t) dt = c_j (\bar{u}_j, u_j), \quad (8.9)$$

где T — время интегрирования, равное времени передачи одного информационного символа $\tau_{\text{и}}$.

Второе слагаемое определяет взаимную (переходную) помеху, действующую в канале с номером j из-за присутствия на входе оптимального приемника с номером j сигналов других каналов. Оно определяется суммой произведений весовых коэффициентов c_i на скалярные произведения, равные значениям взаимнокорреляционных функций. Если канальные сигналы удовлетворяют условию ортогональности (8.5), то второе слагаемое в выражении (8.8) будет равно нулю:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N c_i \int_0^T \bar{u}_i(t) u_j(t) dt = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N c_i (\bar{u}_i, u_j) = 0. \quad (8.10)$$

Выражение (8.8) с учетом выражения (8.10) приводится к виду

$$\sum_{i=1}^N c_j L_j \bar{u}_i(t) = c_j (\bar{u}_j, u_j) \equiv 0. \quad (8.11)$$

Действие других линейных канальных операторов L_i , $i \neq j$, на левую часть равенства (8.2) приводит к аналогичному результату.

Полученные тождества

$$c_i(\bar{u}_i, u_i) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

выполняются, если все постоянные коэффициенты $c_i = 0$, так как скалярные произведения $(\bar{u}_i, u_i) \neq 0$. Следовательно, канальные сигналы $\bar{u}_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, являются линейно независимыми и поэтому разделяются.

Определитель Грама, выражающий условие разделения группового сигнала на модулированные по амплитуде или начальной фазе канальные сигналы в синхронной многоканальной системе связи, в этом случае записывается в виде

$$\left\| \begin{pmatrix} (\bar{u}_1, u_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (\bar{u}_2, u_2) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & (\bar{u}_j, u_j) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & (\bar{u}_N, u_N) \end{pmatrix} \right\| = \prod_{i=1}^N (\bar{u}_i, u_i) \neq 0. \quad (8.12)$$

Рассмотрим частные случаи разделения. При АМ сигнал на выходе канального передатчика с номером j определяется выражением

$$\bar{u}_j(t) = \begin{cases} u_j(t), & b_j = 1; \\ 0, & b_j = 0, \end{cases} \quad (8.13)$$

где $u_j(t)$ — радиоимпульс заданной амплитуды, длительности τ_n и частоты ω_j , $b_j \in 0, 1$ — информационный символ.

Элемент матрицы (8.12) на пересечении строки и столбца с номерами j равен

$$(\bar{u}_j, u_j) = \int_0^{\tau_n} u_j(t) u_j(t) dt = \begin{cases} E, & \text{если } b_j = 1, \\ 0, & \text{если } b_j = 0, \end{cases} \quad (8.14)$$

где E — энергия канального сигнала.

Порядок матрицы (при занятии всех каналов передачи) определяется числом каналов $m \leq N$, по которым в интервале передачи τ_n передается символ 1.

Значение матрицы определяется выражением

$$\prod_i (\bar{u}_i, u_i) = E^m \neq 0, \quad (8.15)$$

где E — энергия канального сигнала. Число произведений равно m , а индексы i определяют номера каналов, по которым передается символ 1. Следовательно, канальные АМ радиоимпульсы разделяются.

Посылка радиоимпульса с однократной ОФМ на выходе канального передатчика с номером j является радиоимпульсом заданной амплитуды, длительности τ_n и частоты ω_j :

$$\bar{u}_j(t) = \begin{cases} -u_j(t), & \text{если } b_j = 1; \\ u_j(t), & \text{если } b_j = 0. \end{cases} \quad (8.16)$$

Элемент матрицы (8.12) на пересечении строки и столбца с номерами j равен

$$(\bar{u}_j, u_j) = \begin{cases} -\int_0^{\tau_n} u_j(t) u_j(t) dt = -E, & \text{если } b_j = 1; \\ \int_0^{\tau_n} u_j(t) u_j(t) dt = E, & \text{если } b_j = 0. \end{cases} \quad (8.17)$$

Порядок матрицы (8.12) при полном занятии каналов равен N — числу каналов в многоканальной системе связи. Значение матрицы равно одному из двух случайных величин $\mp E^N$, что подтверждает разделение посылок канальных ОФМ сигналов.

Рассмотрим примеры разделения более сложных дискретных канальных сигналов, известных точно. К этим сигналам относятся ЧМ сигналы; сигналы с многократной ОФМ; ШС, модулированные по форме. Канальные сигналы выбираются ортогональными и отличаются друг от друга закрепленными за ними признаками.

За дискретными ЧМ сигналами закрепляются номера кодовых последовательностей ортогонального кода. Такими последователь-

ностями могут быть последовательности Уолша или Д-последовательности.

За сигналами с многократной ОФМ и ШС, модулированными по форме, закрепляются значения частот.

Канальные оптимальные приемники этих сигналов являются многоканальными. Примером приемника дискретного ЧМ сигнала и ШС, модулированного по форме, является приемник, упрощенная структурная схема которого приведена на рис. 7.1. В этой схеме не приведены устройства, обеспечивающие формирование опорных сигналов, отсчет накопленных интеграторами напряжений и их сброс в соответствующие моменты времени.

Примером канального приемника сигнала с многократной ОФМ является оптимальный когерентный приемник, структурная схема которого совпадает со схемой оптимального когерентного детектора, приведенной на рис. 7.34.

Преобразование в оптимальном канальном корреляционном приемнике является линейным оператором L_j , если на опорные входы умножителей, входящих в состав корреляторов, подаются опорные сигналы $u_{j,s}(t)$ с таким признаком j , который позволяет выделять по этому признаку принимаемый канальный сигнал $\bar{u}_{j,r}(t)$ на фоне других канальных сигналов с целью его детектирования.

В многоканальной системе имеется N каналов с номерами $1, 2, \dots, N$. Канальный сигнал $\bar{u}_{j,r}(t)$ с признаком j имеет второй номер $r \in \{1, 2, \dots, 2^k\}$, определяющий передаваемое двоичное слово блока. Число слов в блоке равно 2^k , где k — длина блока.

Опорные сигналы $u_{j,s}(t)$ с признаком j и номерами $s = 1, 2, \dots, 2^k$ обеспечивают детектирование принимаемого канального сигнала $\bar{u}_{j,r}(t)$.

Преобразование в оптимальном канальном приемнике с номером j , построенном на согласованных фильтрах, число которых равно 2^k , $k = 1, 2, \dots$, является линейным канальным оператором L_j , если эти фильтры с номерами $s = 1, 2, \dots, 2^k$ согласованы соответственно с сигналами $u_{j,s}(t)$, $s = 1, 2, \dots, 2^k$ с одинаковым признаком j . Этот признак обеспечивает выделение сигнала $\bar{u}_{j,r}(t)$ на фоне других канальных сигналов и его детектирование.

Действие линейного канального оператора L_j на левую часть равенства (8.2), с учетом более сложной структуры канальных сигналов и их параллельной передачи, определяется выражением

$$\sum_{i=1}^N c_i L_j \bar{u}_{i,r}(t) = c_j L_j \bar{u}_{j,r}(t) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N c_i L_j \bar{u}_{i,r}(t) \equiv 0. \quad (8.18)$$

Первое слагаемое полученного выражения определяет отклики 2^k канальных устройств, входящих в оптимальный канальный приемник с номером j , на принимаемый канальный сигнал $\bar{u}_{j,r}(t)$. На выходе канального устройства с номером $s = r$ реализуется наибольшее значение взаимно корреляционной функции. Это значение пропорционально скалярному произведению $(\bar{u}_{jr}, u_{jr})$. На выходах остальных канальных устройств с номерами $s \neq r$ реализуются такие значения взаимно корреляционных функций (пропорциональные скалярным произведениям $(\bar{u}_{jr}, u_{js})$), которые меньше значения скалярного произведения $(\bar{u}_{jr}, u_{jr})$. Это позволяет по номеру канального устройства, на выходе которого реализуется наибольшее скалярное произведение, определить двоичное слово, передаваемое по каналу с номером j .

Второе слагаемое выражения (8.18) описывает действие линейного канального оператора L_j оптимального канального приемника с номером j на сигналы $\bar{u}_{i,r}(t)$, $i \neq j$, других каналов. Эти сигналы присутствуют на входе оптимального канального приемника с номером j и создают взаимную помеху.

Помеха, являющаяся откликом канального устройства с номером $s \in \{1, 2, 3, \dots, 2^k\}$ оптимального канального приемника с номером j на сигналы других каналов, определяется выражением

$$\int_0^T \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \bar{u}_{i,r}(t) u_{j,s}(t) dt = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \int_0^T \bar{u}_{i,r}(t) u_{j,s}(t) dt = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N (\bar{u}_{ir}, u_{js}), \quad (8.19)$$

где $(\bar{u}_{ir}, u_{js})$ — скалярное произведение сигнала $\bar{u}_{i,r}(t)$, действующего в канале с номером i , и опорного сигнала $u_{j,s}(t)$, действующего в канальном устройстве с номером s оптимального канального приемника с номером j ; $T = k\tau_{\text{н}}$ — время интегрирования произведения сигналов; N — число каналов в синхронной многоканальной системе связи.

Теоретически взаимная помеха полностью подавляется, если каналные сигналы удовлетворяют условию ортогональности. В этом случае выражение (8.19) равно нулю. С учетом этого выражение (8.18) приводится к виду

$$\sum_{i=1}^N c_i L_j \bar{u}_{i,r}(t) = c_j L_j \bar{u}_{j,r}(t) \equiv 0. \quad (8.20)$$

Полученное тождество выполняется только в том случае, если постоянный коэффициент $c_j = 0$ и действие линейного канального оператора L_j приводит к ненулевому результату. Это выражается присутствием на выходе канального устройства с номером r оптимального канального приемника с номером j наибольшего скалярного произведения $(\bar{u}_{jr}, u_{jr})$ по сравнению со скалярными произведениями $(\bar{u}_{js}, u_{js})$ на выходах других канальных устройств с номерами $s \neq r$ и присутствием на выходе оптимального канального приемника принятого двоичного слова блока. Действие канальных операторов L_i , $i \neq j$, в других каналах синхронной многоканальной системы связи на левую часть равенства (8.2) приводит к аналогичному результату. Это свидетельствует о том, что каналные сигналы являются линейно независимыми и поэтому разделяются.

8.4.2. Асинхронные системы

Разделение дискретных сигналов в асинхронных многоканальных системах связи из-за свободного доступа в каналы приобретает особенности по сравнению с разделением в синхронных системах, но общий подход к решению проблемы разделения дискретных сигналов при этом сохраняется.

Для анализа сигналов, обоснования их разделения оптимальными канальными приемниками (так же как и в синхронных системах) может использоваться условие линейной независимости этих сигналов, записанное в виде определителя Грама (8.4).

За канальными сигналами асинхронных систем, так же как и за сигналами синхронных систем, закрепляются определенные признаки, позволяющие по этим признакам отделять (селектировать) эти каналные сигналы от других канальных сигналов и затем демо-

дулировать их. Оптимальные каналные приемники наделяются свойством по признакам каналных сигналов «откликаться» на них и не реагировать на остальные сигналы. В качестве признаков используются, например, значения частот или номера кодовой последовательности заранее выбранного кода.

Определение линейного каналного оператора, действующего в оптимальном каналном приемнике асинхронной многоканальной системы связи, не отличается от определения линейного каналного оператора, действующего в оптимальном каналном приемнике синхронной многоканальной системы связи.

Канальная тактовая и временная синхронизация физических процессов, протекающих в передатчиках и приемниках дискретных каналных сигналов в синхронных и асинхронных многоканальных системах связи, в целом не различаются.

Отметим некоторые отличия синхронизации в синхронных и асинхронных системах связи.

Если в синхронных многоканальных системах связи начало и конец дискретных каналных сигналов или их посылок совпадают, то в асинхронных многоканальных системах со свободным доступом в каналы дискретные каналные сигналы или их посылки оказываются не связанными во времени. Это приводит к различию средств, обеспечивающих выполнение условия ортогональности дискретных каналных сигналов при частотном и кодовом разделении.

При частотном разделении в синхронных системах условие ортогональности выполняется выбором кратных частот, а в асинхронных — увеличением разноса частот между несущими каналных каналов.

При разделении дискретных каналных сигналов по форме (кодовом разделении) в синхронных системах условие ортогональности выполняется выбором каналных кодовых последовательностей ортогонального кода. В асинхронных системах из-за произвольных временных сдвигов между дискретными каналными сигналами, обусловленных свободным доступом в каналы, условие ортогональности между дискретными каналными сигналами выполняется приблизительно и при больших значениях баз этих каналов.

По этим причинам асинхронные многоканальные системы связи используют частотные и временные интервалы, отведенные для связи, менее эффективно.

Математическое описание разделения канальных сигналов в асинхронных многоканальных системах связи не отличается от математического описания разделения канальных сигналов в синхронных многоканальных системах связи, приведенного в п. 8.4.1, но трудности и объем вычислений увеличиваются.

8.5. Частотное разделение дискретных канальных сигналов



Частотный способ разделения сигналов отличается формированием в канальных передатчиках многоканальных систем связи модулированных дискретных ортогональных сигналов с заданными частотными признаками и использованием канальных оптимальных приемников с избирательными свойствами к этим сигналам.

Теоретические основы частотного разделения, рассматриваемого ниже, приведены в § 8.3, 8.4. Модуляция дискретных канальных сигналов при частотном разделении может быть двоичной амплитудной и однократной относительной фазовой модуляцией. Могут применяться и более сложные виды модуляций: многократная относительная фазовая модуляция, квадратурная амплитудная модуляция, модуляция шумоподобного сигнала по амплитуде, фазе (знаку) и форме. Однако с усложнением модуляции, структур канальных приемников и снижением качества синхронизации уровень взаимных помех увеличивается.

Для выполнения условия ортогональности дискретных канальных сигналов в многоканальных системах связи (синхронных и асинхронных) значения частот этих сигналов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ выбираются так, чтобы спектры канальных сигналов не перекрывались. Значения частот при этом следуют через интервал, равный

$$\Delta\omega + \Delta\omega_3, \quad (8.21)$$

где $\Delta\omega$ — ширина спектра канального сигнала; $\Delta\omega_3$ — *защитный интервал*, обеспечивающий ослабление спектральных составляю-

щих соседних канальных сигналов и таким образом уменьшающий взаимную помеху.

В синхронных системах значения частот могут быть выбраны также кратными величине

$$\frac{4\pi m}{T}, \quad (8.22)$$

где $m \in \{1, 2, 3, \dots\}$, T — длительность канальных сигналов.

В качестве канальных приемников рекомендуется использовать оптимальные приемники, синтезированные для заданных дискретных сигналов и аддитивного нормального белого шума. Применение этих приемников позволяет разделить ортогональные канальные сигналы, отличающиеся по частотному признаку, и реализовать высокую помехоустойчивость.

В канальных передатчиках синхронных многоканальных систем связи дискретные канальные сигналы формируются посредством модуляции гармонических колебаний информационными посылками или блоками из них от отдельных синхронных источников. Дискретные канальные сигналы отличаются закрепленными за ними частотными признаками, имеют постоянную длительность и следуют непрерывно либо через строго фиксированные промежутки времени.

Групповой сигнал при синхронной передаче информации по групповому каналу состоит из суммы канальных сигналов или их посылок, начало и конец которых совпадает с началом и концом передаваемых по каналам информационных посылок или блоков из них.

При синхронной работе оптимальных канальных корреляционных приемников в синхронной многоканальной системе связи реализуется:

□ синхронный прием дискретных модулированных канальных сигналов или их посылок, при котором значения параметров опорных сигналов устанавливаются равными значениям неинформационных параметров принимаемых модулированных канальных сигналов;

□ подавление взаимных помех и разделение принимаемых ортогональных канальных сигналов путем одновременного интегрирования в каждом канале произведений группового сигнала

и опорных сигналов в виде отрезков гармонических сигналов с заданными частотами;

□ регенерация информационных посылок на выходах канальных приемников.

В асинхронных многоканальных системах связи дискретные канальные сигналы формируются также посредством модуляции гармонических колебаний информационными посылками или блоками из них, но из-за свободного доступа источников информации в каналы связи модулированные канальные сигналы не связаны между собой во времени. Дискретные канальные сигналы отличаются закрепленными за ними частотными признаками, имеют постоянную длительность и следуют непрерывно.

В оптимальных канальных корреляционных приемниках асинхронной многоканальной системы связи реализуется:

□ синхронный прием дискретных модулированных канальных сигналов, при котором значения параметров опорных сигналов устанавливаются равными значениям неинформационных параметров принимаемых модулированных канальных сигналов;

□ подавление взаимных помех и разделение принимаемых ортогональных модулированных канальных сигналов путем интегрирования в каждом канале произведений группового сигнала и опорных сигналов (отрезков гармонических сигналов с определенными параметрами);

□ регенерация информационных посылок на выходах канальных приемников.

Для реализации оптимальных методов приема и разделения канальных сигналов необходима синхронизация работы канальных передатчиков и приемников. Технические средства, с помощью которых в канальных передатчиках формируются синхронно или асинхронно модулированные канальные сигналы, а в канальных корреляционных приемниках реализуется их синхронный прием, называются *устройствами синхронизации*.

При синхронном приеме модулированных канальных сигналов устройство синхронизации, входящее в состав приемной части многоканальной синхронной системы связи, является общим для всех канальных приемников, осуществляет подстройку параметров опорных сигналов, слежение за их изменением во времени, предсказание начала и конца принимаемых канальных сигналов

или их посылок, управление работой интеграторов и регенераторов информационных посылок.

Подстройка параметров опорных сигналов производится с учетом априорной информации о таких параметрах, как частота, длительность канальных сигналов и их посылок и информации, полученной по каналам синхронизации или по результатам измерений параметров принимаемых канальных сигналов, о начальных фазах гармонических сигналов.

Синхронизация в асинхронных многоканальных системах связи отличается тем, что каждый оптимальный канальный корреляционный приемник включает устройство синхронизации. Оно обеспечивает:

- подстройку параметров опорных сигналов, слежение за их изменениями;
- предсказание начала и конца принимаемого канального сигнала и его посылок;
- управление работой канального интегратора (интеграторов) и регенератора информационных посылок.



8.6. Разделение сигналов по форме

Способ разделения дискретных сигналов по форме (см. § 8.3, 8.4) характеризуется формированием в канальных передатчиках многоканальных систем связи модулированных по амплитуде, знаку или форме ШС с заданными признаками и использованием канальных оптимальных приемников с избирательными свойствами к этим сигналам.

Признаками канальных ШС являются отличающиеся формы этих сигналов. Если сигналы кодируются, то признаками канальных сигналов являются кодовые последовательности.

В синхронных многоканальных системах связи используются ортогональные, а в асинхронных — почти ортогональные кодовые последовательности.

Если для передачи информации используются АМ ШС и ФМ ШС, то в этом случае длина кода, кодовые последовательности которого выбираются в качестве признаков канальных сигналов, равна числу каналов в многоканальной системе связи. При этом

за каналами закрепляются все кодовые последовательности этого кода.

В случае использования модуляции ШС по форме, длину кода следует выбирать равной 2^{k+l} , где k — длина информационного блока, l — целое положительное число, определяющее число каналов в многоканальной системе связи $N = 2^l$.

Передача кодированных канальных сигналов по групповому радиоканалу производится на одной несущей частоте, в общей для всех этих сигналов полосе частот, значение которой определяется временем передачи одного символа кодовой последовательности.

Для реализации алгоритма оптимального приема и разделения канальных сигналов необходимо обеспечить заданное функционирование канальных передатчиков и канальных приемников.

В синхронных многоканальных системах связи при параллельной синхронной передаче информации дискретные модулированные канальные кодированные сигналы формируются в канальных передатчиках посредством модуляции сфазированных, ортогональных кодированных сигналов информационными посылками или блоками из них, поступающими от отдельных, также сфазированных источников.

При фазировании обеспечивается выполнение равенства

$$\frac{1}{k\tau_{\text{и}}} = \frac{1}{N\tau_0}, \quad (8.23)$$

где $k\tau_{\text{и}}$ — длительность информационного блока; $\tau_{\text{и}}$ — единичный (такты) интервал; $N\tau_0$ — период кодовой последовательности, равный произведению периода кодовой последовательности на время передачи одного символа кодовой последовательности.

Фазирование ортогональных кодированных сигналов с информационными посылками ($k = 1$) или с блоками из них ($k > 1$) осуществляется с помощью общего для всех каналов устройства синхронизации, включенного в состав передатчика синхронной многоканальной системы связи. В результате групповой сигнал на выходе формирователя этого сигнала равен линейной сумме канальных модулированных кодированных сигналов, начало и конец которых совпадают с началом и концом передачи информационных символов или блоков из них.

При синхронной работе оптимальных канальных приемников синхронной многоканальной системы связи реализуется:

□ синхронный прием модулированных ортогональных канальных кодированных сигналов, при котором значения параметров опорных сигналов устанавливаются и в дальнейшем поддерживаются равными значениям неинформационных параметров принимаемых модулированных ортогональных кодированных сигналов (частоты, начальной фазы гармонической несущей, задержки канальных сигналов, периода кодированных опорных сигналов, времени передачи символов кодовой последовательности, тактовой частоты);

□ подавление взаимных помех и разделение ортогональных кодированных канальных сигналов путем одновременного интегрирования в каждом канале произведений группового сигнала и опорных кодированных сигналов;

□ регенерация информационных посылок на выходах канальных приемников.

В асинхронных многоканальных системах связи дискретные модулированные кодированные канальные сигналы формируются аналогично сигналам в синхронных системах посредством модуляции кодированных канальных сигналов информационными посылками или блоками из них, но из-за свободного доступа источников информации в каналы связи канальные сигналы не связаны (не синхронизированы) между собой во времени.

Групповой сигнал на выходе формирователя этого сигнала равен сумме задержанных на неопределенное время модулированных канальных кодированных сигналов, начало и конец которых совпадают с началом и концом информационных символов или блоков из них только «своего» источника.

Фазирование почти ортогональных канальных кодированных сигналов с информационными посылками ($k = 1$) или блоками из них ($k > 1$) только «своего» источника осуществляется при помощи канальных устройств синхронизации, включенных в состав каждого канального передатчика.

В оптимальных канальных корреляционных приемниках асинхронной многоканальной системы связи, включая и разнесенные в пространстве приемники, реализуется:

□ синхронный прием канальных модулированных кодированных сигналов, при котором значения параметров опорных сигна-

лов устанавливаются и в дальнейшем поддерживаются равными значениям неинформационных параметров канальных модулированных, кодированных сигналов (частоты, начальной фазы гармонической несущей, задержки канальных сигналов, времени передачи символов кодовой последовательности и др.);

- подавление взаимных помех и разделение почти ортогональных модулированных кодированных сигналов путем интегрирования в каждом канальном приемнике произведений группового сигнала и опорных сигналов;

- регенерация информационных посылок на выходах канальных приемников.

Для реализации оптимальных методов приема и разделения канальных сигналов по кодовым признакам в синхронных и асинхронных системах необходима синхронизация работы канальных передатчиков и канальных приемников.

Устройство синхронизации, входящее в состав приемной части многоканальной синхронной системы связи, является общим для всех каналов. С его помощью осуществляется подстройка параметров опорных сигналов и слежение за их изменениями во времени с учетом априорной информации о неинформационных параметрах принимаемых сигналов и информации, полученной об этих параметрах по каналам синхронизации или по результатам измерений неинформационных параметров принимаемых модулированных канальных кодированных сигналов.

Приемная часть асинхронной многоканальной системы связи отличается тем, что работа каждого оптимального канального приемника поддерживается автономным устройством синхронизации. Оно обеспечивает подстройку параметров опорных сигналов и слежение за изменением неинформационных параметров принимаемого канального сигнала, предсказание его начала и конца, управление работой канального интегратора (интеграторов) и регенератора информационных посылок.

Одной из главных функций устройств синхронизации при разделении сигналов по форме является поиск кодированных модулированных канальных сигналов по частоте и задержке, а после завершения поиска — слежение за изменениями частоты и задержки этих канальных сигналов.

Процесс совмещения опорных кодированных сигналов с принимаемыми канальными модулированными сигналами по частоте

и задержке называется поиском сигнала (см. п. 7.2.4). Поиск решает задачу синхронизации неполно, так как после его завершения частота и задержка принимаемого сигнала могут измениться из-за изменений условий распространения сигналов, нестабильностей генераторов частот, движения передатчика, приемника или ретранслятора и других причин. Для полного решения задачи синхронизации в устройство синхронизации вводятся следящие системы, осуществляющие автоматическую подстройку частоты и задержки опорных канальных сигналов после завершения поиска сигнала.

8.7. Фазовое разделение дискретных сигналов



Фазовое разделение дискретных сигналов (при синхронной передаче информации и применении в качестве разделяющих устройств оптимальных приемников) базируется на теории разделения (см. § 8.3, 8.4).

Признаками канальных сигналов являются значения их начальных фаз, а оптимальные канальные приемники наделяются свойством выделять дискретные канальные сигналы по фазовым признакам и подавлять дискретные сигналы других каналов.

Фазовое разделение по сравнению с другими способами (частотным разделением, разделением по форме) имеет существенный недостаток, заключающийся в том, что это разделение возможно только в двухканальной системе.

Рассмотрим синхронную передачу двоичной информации по двум каналам с помощью канальных сигналов с однократной ОФМ:

$$\begin{aligned}\bar{u}_1(t) &= Ac_1(t)\cos\omega_0 t, \\ \bar{u}_2(t) &= Ac_2(t)\cos(\omega_0 t - \Delta\varphi),\end{aligned}\tag{8.24}$$

где $\bar{u}_1(t)$, $\bar{u}_2(t)$ — канальные сигналы с однократной ОФМ с одинаковыми амплитудами A и длительностями τ_n , начало и конец которых совпадают; $c_1(t)$, $c_2(t)$ — знакопеременные случайные функции, определяющие канальные сигналы в соответствии с формулой (3.54). Эти функции изменяются в соответствии с передаваемой двоичной информацией и принимают одно из двух значений (-1 или 1) в течение длительности канальных сигналов.

Убедимся, что сигналы (8.24) разделяются. Для этого запишем и вычислим определитель Грама (8.4):

$$\begin{vmatrix} (\bar{u}_1, u_1) & (\bar{u}_1, u_2) \\ (\bar{u}_2, u_1) & (\bar{u}_2, u_2) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (8.25)$$

Скалярное произведение

$$(\bar{u}_1, u_1) = \int_0^{\tau_n} A c_1(t) \cos \omega_0 t \cdot A \cos \omega_0 t dt \simeq \frac{A^2}{2} \int_0^{\tau_n} c_1(t) dt.$$

При синхронной передаче информации с помощью однократной ОФМ начало модулирующей информационной функции $c_1(t)$ соответствует моменту времени $t = 0$, конец — моменту времени $t = \tau_n$. Поэтому

$$\int_0^{\tau_n} c_1(t) dt = \mp \tau_n;$$

$$(\bar{u}_1, u_1) = \mp \frac{A^2 \tau_n}{2} = \mp E,$$

где E — энергия канального сигнала.

Скалярное произведение является дискретной случайной величиной, которая на отрезке времени $[0, \tau_n]$ принимает одно из двух значений: $-E$ или E — в соответствии с передаваемой двоичной информацией.

Аналогично вычисляются остальные скалярные произведения, которые также являются дискретными случайными величинами.

Подставляя вычисленные скалярные произведения в определитель (8.25), получим

$$\begin{vmatrix} \pm E & \pm E \cos \Delta\varphi \\ \pm E \cos \Delta\varphi & \pm E \end{vmatrix} \neq 0. \quad (8.26)$$

Вычисление матрицы упрощается, если $\Delta\varphi = \pi/2$. В этом случае определитель (8.26) записывается в виде

$$\begin{vmatrix} \pm E & 0 \\ 0 & \pm E \end{vmatrix} = \pm E^2 \neq 0. \quad (8.27)$$

Значение определителя определяется не равным нулю случайным числом, что свидетельствует о том, что при числе каналов $N = 2$ и $\Delta\varphi = \pi/2$ каналные сигналы с однократной ОФМ разделяются по фазовому признаку.

Фазовое разделение дискретных сигналов реализуется с помощью двухканального оптимального корреляционного приемника. Линейные преобразования в канальных корреляционных приемниках являются канальными операторами L_1, L_2 , если на опорные входы умножителей, входящих в состав корреляторов, поступают сигналы $A\cos\omega_0 t$, $A\sin\omega_0 t$. При этом взаимная помеха в каналах полностью подавляется, если обеспечивается синхронная передача и синхронный прием канальных сигналов.



8.8. Временное разделение сигналов

Способ *временного разделения сигналов* используется в цифровых многоканальных системах связи с ИКМ. Способ отличается последовательной во времени и циклической передачей канальных двоичных сигналов по групповому каналу. Цикл передачи разбивается на равные, не совпадающие во времени канальные интервалы. Первый или другой интервал используется для передачи синхросигнала, а остальные канальные интервалы — для передачи канальных сигналов. Каждый из канальных сигналов не может быть получен линейным сложением других канальных сигналов, так как все канальные сигналы не перекрываются во времени. Поэтому они удовлетворяют условию (8.2), а групповой сигнал разделяется. В качестве признака канального сигнала используется время задержки этого сигнала относительно синхросигнала.

Синхросигнал, формируемый в генераторе синхросигнала, отличается от канальных сигналов определенным признаком для того, чтобы отделить этот сигнал от канальных сигналов. Таким признаком является детерминированная структура синхросигнала, определяемая заданной кодовой последовательностью нулей и единиц.

Временное разделение сигналов рассмотрим на примере цифровой многоканальной системы передачи непрерывных сообщений.

Пусть цикл передачи сигналов в этой системе определяется интервалом времени

$$\Delta t = \frac{1}{2F_{\text{в}}},$$

где $F_{\text{в}}$ — значение верхней граничной частоты первичного непрерывного сигнала. Если число каналов в системе равно N , то в этом случае длительность канального интервала равна $\Delta t/(N + 1)$.

Первичные непрерывные сигналы, поступающие от источников непрерывных сообщений, преобразуются в формирователе группового сигнала посредством ИКМ в двоичные канальные сигналы одинаковой длительности. При этом преобразовании значения первичных сигналов в дискретные моменты времени $t_1, t_2, t_3, \dots, t_N$ сравниваются с ближайшими уровнями квантования, а затем значения этих уровней преобразуются в двоичные слова, определяющие канальные сигналы.

Длительность этих сигналов одинакова и равна

$$n\tau_{\text{и}} = \tau_{\text{и}} \log L = \frac{\Delta t}{(N + 1)}, \quad (8.28)$$

где n — число разрядов двоичного числа, определяющего двоичный канальный сигнал; $\tau_{\text{и}}$ — длительность единичного (тактового) интервала; L — число уровней квантования.

Двоичные канальные сигналы формируются в течение закрепленных за ними канальных интервалов с номерами $i = 1, 2, \dots, N$. Поэтому групповой сигнал равен сумме задержанных на время $(i - 1)n\tau_{\text{и}}$ двоичных канальных сигналов.

Если двоичный сигнал на выходе АЦП строится из импульсов прямоугольной формы, то ширина спектра группового сигнала

$$\frac{1}{\tau_{\text{и}}} = 2F_{\text{в}}(N + 1)\log L. \quad (8.29)$$

Синхросигнал и следующий за ним групповой сигнал передаются по групповому каналу. При приеме синхросигнал и групповой сигнал поступают на вход приемника синхросигнала и на входы N управляемых электронных ключей. Вначале с помощью приемника синхросигнала выделяется синхросигнал. Он запускает

распределитель импульсов каналов, на N выходах которого формируются следующие друг за другом не перекрывающиеся во времени прямоугольные видеоимпульсы, длительность которых равна канальным интервалам. Видеоимпульсы поочередно поступают на управляющие входы электронных ключей и замыкают их на время действия видеоимпульсов. В результате канальные приемники, соединенные с выходами управляемых электронных ключей, поочередно подключаются к выходу группового канала. Групповой сигнал разделяется на двоичные канальные сигналы, которые распределяются по соответствующим каналам. В состав каждого канала входит ЦАП. Двоичный канальный сигнал, действующий на входе ЦАП, преобразуется в прямоугольный импульс сравнительно небольшой длительности. Значение амплитуды этого импульса равно значению ближайшего уровня квантования в АЦП, а его период равен циклу передачи.

АМ импульсы, которые формируются в ЦАП, поступают на фильтр нижних частот, входящий в состав ЦАП. На выходе ЦАП формируется оценка передаваемого по каналу первичного непрерывного сигнала.



8.9. Пространственное разделение сигналов

Пространственное разделение сигналов в радио- и оптическом диапазонах волн основано на способности электромагнитных колебаний к направленному излучению и ослаблению.

При направленном излучении энергия колебаний концентрируется с помощью антенны в определенном направлении (в пределах некоторого телесного угла). Степень концентрации увеличивается с уменьшением длины волны.

Характеристикой направленности является зависимость напряженности поля от азимута и угла места. Графическое изображение функции направленности называется *диаграммой направленности*.

Диаграмма направленности содержит главный лепесток и боковые лепестки. В направлении главного лепестка интенсивность излучения максимальна. Для организации передачи информации от разных источников на одной и той же несущей частоте, но в разных направлениях, необходимо в пунктах передачи и приема

расположить приемопередатчики и антенны с весьма малыми боковыми лепестками. Главные лепестки передающих антенн следует направлять на соответствующие приемные антенны. Пространственное разделение сигналов может быть достигнуто и с использованием другого свойства электромагнитных колебаний — их способности к ослаблению (затуханию). Это свойство используется в сотовых системах связи. Известно, что мощность сигнала на входе приемника прямо пропорциональна мощности передатчика и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Поэтому на некотором расстоянии от передатчика мощность на входе приемника становится недостаточной для уверенного приема.

Обслуживаемая территория (рис. 8.2) разбивается на зоны без перекрытия и пропуска участков. Наиболее подходящей фигурой, используемой при этом разбиении, является шестиугольник. В центре каждого шестиугольника устанавливается приемо-передающее оборудование с антеннами, диаграммы направленности которых часто выбираются равномерными во всех направлениях, т.е. круговыми. Мощность передатчиков выбирается сравнительно небольшой, чтобы обеспечить уверенный прием только в своей зоне. Из-за ослабления сигнала в других зонах в большинстве зон передатчики могут работать на одних и тех же частотах, так как мощность

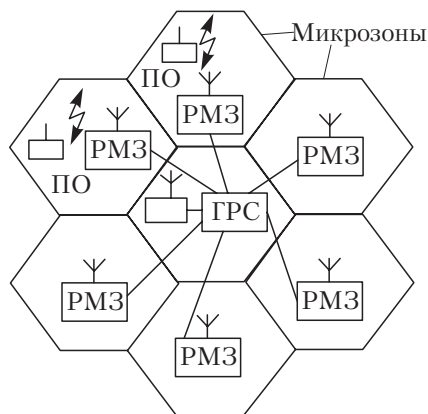


Рис. 8.2. Структурная схема сотовой системы связи:
ГРС — главная радиостанция; РМЗ — радиостанция микрзоны;
ПО — подвижный объект

сигнала успевает в достаточной степени уменьшиться примерно через две ячейки. Поэтому считается допустимым использовать одни и те же частоты через две ячейки.

В центре обслуживаемой территории устанавливается главная радиостанция, которая соединительными линиями связывается со всеми остальными радиостанциями, расположенными в других зонах. Главная радиостанция соединяется, кроме того, и с телефонной сетью. Все радиостанции, включая и главную, обеспечивают связь с абонентами, имеющими мобильные телефоны. Часть приемо-передающего оборудования устанавливается на подвижных объектах. При связи абонента автоматической телефонной станции с абонентом, например, подвижного объекта сигнал вызова из телефонной сети попадает на главную радиостанцию, от нее по соединительным линиям к одной из радиостанций зоны, а затем по радиоканалу к абоненту. Сотовые системы связи охватывают большие территории и большое число абонентов.

8.10. Поляризационное разделение сигналов



Поляризационное разделение сигналов возможно в радиодиапазоне. Распространяющаяся электромагнитная волна характеризуется векторами электрической E и магнитной H напряженностей поля. Векторы E и H перпендикулярны, а направление распространения волны перпендикулярно плоскости, в которой лежат эти векторы. Векторы E и H , связанные с этими направлениями, имеют определенную пространственную ориентацию. Поскольку векторы почти всегда перпендикулярны, их пространственная ориентация определяется вектором E . По направлению этого вектора в пространстве и по изменению его во времени можно составить представление о характере поляризации излучения. При передаче информации векторы E и H изменяются во времени в соответствии с изменением тока в передающей антенне, и для обеспечения качественного приема необходимо, чтобы поляризация приемной антенны соответствовала поляризации принимаемого сигнала. В противном случае мощность этого сигнала может оказаться ниже

допустимой и качество приема ухудшится. Например, поляризация сигналов с некоторых спутников отличается от поляризации приемных антенн. Сигнал принимается в той же плоскости, в которой был послан, только тогда, когда спутник и приемная антенна находятся на одной долготе. Если спутник находится на другой долготе, то, в силу того что Земля имеет форму шара, плоскость поляризации принимаемого сигнала будет расположена под некоторым углом к исходной плоскости поляризации. Для улучшения качества приема в этом случае применяют поляризаторы, с помощью которых совмещают векторы E принимаемой волны и приемной антенны.

Если вектор E колеблется в вертикальной плоскости, то такая поляризация называется *вертикальной*, а если в горизонтальной плоскости — то *горизонтальной*. Электромагнитные поля с вертикальной и горизонтальной поляризацией удовлетворяют условию ортогональности, и это свойство можно использовать для передачи информации от разных источников на одной и той же несущей частоте. Сигналы с разной поляризацией, излучаемые антеннами передатчиков, одновременно воздействуют на антенны приемников, но каждая антенна откликается только на тот сигнал, поляризация которого совпадает с ее поляризацией.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте условие линейного разделения сигналов.
2. Запишите условие линейного разделения сигналов в виде определителя.
3. Дайте определение линейного канального оператора.
4. Что понимают под признаком канального сигнала?
5. Каким свойством наделяются канальные сигналы?
6. Каким свойством наделяются канальные приемники многоканальных систем связи?
7. Какие способы разделения сигналов известны?
8. Какие преимущества имеет многоканальная передача сообщений?
9. Какие требования предъявляются к канальным сигналам синхронных и асинхронных многоканальных систем связи?
10. В чем сходство и различие способов частотного разделения сигналов и разделения сигналов по форме?
11. В чем заключается способ фазового разделения сигналов?

12. Каким условиям удовлетворяют шумоподобные сигналы, используемые для разделения канальных сигналов в синхронных и асинхронных многоканальных системах связи?
13. В каких цифровых многоканальных системах связи реализуется временной способ разделения сигналов?

ЭФФЕКТИВНОСТЬ СИСТЕМ СВЯЗИ



9.1. Оценка эффективности систем связи

Под *эффективностью* Q понимают некоторую функцию показателей качества, которая характеризует систему связи с технической точки зрения:

$$Q = f(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}). \quad (9.1)$$

Показателями качества k_i , $i = 1, 2, \dots, m - 1$, называются такие параметры, которые удовлетворяют условию: чем больше (меньше) параметр, тем лучше (хуже) система. Некоторые показатели качества систем связи: точность (верность) воспроизведения сообщения, скорость передачи информации, пропускная способность канала, помехозащищенность, надежность и т.д. Примеры параметров: длина рабочей волны, на которой работает радиосистема; ширина полосы канала связи и др.

В отношении параметров нельзя утверждать, что чем он больше (меньше), тем лучше (хуже) система. Для более полного описания вводят еще один важный показатель качества — стоимость C .

Функцию эффективности и стоимость применяют для оценки оптимальности системы связи. Критерий оптимальности записывают в виде

$$Q = f(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) = \max(\min); \quad (9.2)$$

$$C \leq C_m,$$

где C_m — максимально допустимое значение стоимости.

Задача отыскания оптимальной системы связи, таким образом, связана с отысканием функции эффективности, которая называется также *целевой функцией*. К этой функции предъявляются следующие требования:

- она должна наиболее полно характеризовать систему;
- функция должна быть простой для вычислений и удобной для практического использования.

Эти требования являются противоречивыми. Чтобы удовлетворить, например, первому требованию, надо использовать большое число показателей качества, но при этом целевая функция становится сложной и неудобной для расчетов.

Часто целевую функцию полагают равной весовой сумме показателей качества:

$$Q = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i k_i, \quad (9.3)$$

где λ_i — постоянные весовые коэффициенты.

Выбор коэффициентов и показателей качества в определенной мере является произвольным и основывается в том числе на накопленном опыте проектирования и эксплуатации системы. Одной из методик выбора является метод экспертных оценок, при котором учитывается относительная важность показателей качества.

Часто оценку оптимальности системы ведут по одному (наиболее важному) показателю качества, а остальные показатели переводятся в разряд ограничений. Условие оптимальности записывают в виде

$$k_1 = \max(\min); \quad k_2 \leq k_{2M}, \dots, k_{m-1} \leq k_{(m-1)M}, \quad (9.4)$$

где k_1 — наиболее важный показатель; $k_{2M}, \dots, k_{(m-1)M}$ — максимально допустимые значения других показателей качества.

Применяют также поэтапную процедуру оптимизации. Вначале производят оптимизацию по одной группе параметров, а затем — по другой.

9.2. Принципы системного подхода к исследованию и разработке систем связи

Условия оптимальности, приведенные выше, используются при синтезе системы или ее отдельных частей. *Синтез системы* — это определение ее структуры или алгоритма функционирования, связанного с этой структурой. В процессе синтеза определяется состав системы, вид ее отдельных частей (например, передатчика, приемника), характер их взаимосвязи и взаимодействия, форма несущих колебаний, способ модуляции и демодуляции, вид кодирования.

Различают математический и инженерный синтез.

Математический синтез — это отыскание чисто математическим путем структуры системы на основе математических выражений и критерия оптимальности. Из-за сложности решаемой задачи математический синтез больших систем, к которым относятся и системы связи, пока еще не представляется возможным. Поэтому его используют только для отыскания более мелких частей систем, таких, например, как демодулятор, линейный фильтр и т.д. Структуры устройств, полученные в результате математического синтеза, всегда являются оптимальными. Однако математическая оптимизация отдельных частей системы не гарантирует построения оптимальной системы в целом. Примеры математического синтеза приведены в гл. 7.

Под **инженерным синтезом** понимают отыскание структуры системы с использованием:

- математических методов исследования, включающих синтез отдельных частей системы, расчеты на ЭВМ, математическое моделирование и автоматизированное проектирование;
- экспериментальных методов исследования на макетах и образцах системы;
- результатов лабораторных, заводских и других испытаний;
- эвристических методов, использующих предыдущий опыт и знания по созданию и эксплуатации аналогичных систем, интуицию и творческие способности членов коллектива, участвующих в проектировании. Название «эвристический» происходит от слова «эврика» — находить. При инженерном синтезе условия оптимальности системы используют не для отыскания (чисто математическим

путем) ее структуры, а чаще всего для выбора структуры системы из некоторого числа заранее найденных структур. Такой выбор называется *дискретным*.

Если структура системы связи, полученная в результате проведения инженерного синтеза, удовлетворяет заданному критерию оптимальности, то такая система называется *оптимальной*. В противном случае синтезированная структура является *неоптимальной*. Критерий оптимальности (кроме математических выражений) может содержать и описательную часть, в которой содержатся не заданные математически условия и ограничения, накладываемые на систему.

Инженерный синтез системы является составной частью системного подхода к проектированию. Сущность системного подхода заключается в целостном, всестороннем рассмотрении проектируемой системы с учетом:

- этапов ее «жизненного цикла» (проектирование, производство, эксплуатация и утилизация);
- истории и перспектив ее развития (эволюции);
- взаимодействия с природой и обществом в целом;
- взаимного влияния элементной базы и системотехники;
- основных видов взаимодействия внутри системы (функционального, конструктивного, динамического, информационного, энергетического);
- изменения исходных данных и даже решаемой задачи в процессе проектирования, производства и эксплуатации с целью получения более надежных результатов проектирования и обеспечения универсальности применения системы, чтобы при изъятии или добавлении некоторых блоков система была пригодной для решения новых задач;
- выделения главных показателей качества, подлежащих улучшению в первую очередь;
- сочетания принципов композиции, декомпозиции, иерархичности;
- вскрытия основных технических противоречий, препятствующих улучшению качества системы и ускорению процесса ее разработки;
- правильного сочетания различных методов проектирования, в первую очередь математических, эвристических и эксперимен-

тальных, а в рамках математических методов — аналитических и проводимых с помощью ЭВМ;

□ обеспечения должного взаимодействия в процессе проектирования специалистов различных уровней и профилей.

9.3. Анализ систем связи по их эффективности



9.3.1. Энергетическая и частотная эффективность систем связи

Предварительный анализ систем можно вести по небольшому числу показателей качества — обычно таковыми выбирают скорость передачи R (бит/с) и верность передачи, определяемую вероятностью ошибки p при передаче дискретных сообщений или величиной среднеквадратичной погрешности воспроизведения сообщения при передаче непрерывных. Иногда верность передачи непрерывных сообщений характеризуют отношением сигнал/шум на выходе демодулятора. Полагают, что сигналы передаются в канале с полосой, равной F , и аддитивным, нормальным, белым шумом. Отношение сигнал/шум в канале выражают через отношение

$$\rho_0 = \frac{P_c}{N_0},$$

где P_c — мощность сигнала; N_0 — спектральная плотность мощности шума.

Разделим скорость передачи на пропускную способность канала и таким образом вычислим коэффициент использования пропускной способности:

$$\eta = \frac{R}{C}. \quad (9.5)$$

С учетом формулы Шеннона перепишем выражение (9.5) в виде

$$\eta = \frac{R}{F \log(1 + \rho)}, \quad (9.6)$$

где $\rho = P_c/P_{\text{ш}}$ — отношение мощностей сигнала и шума в полосе частот F .

Введем коэффициенты использования пропускной способности канала по мощности β и по полосе частот γ . Эти коэффициенты определяют соответственно эффективность использования энергии сигнала (*энергетическая эффективность*) и эффективность использования полосы канала (*частотная эффективность*):

$$\beta = \frac{R}{\rho_0}, \quad \gamma = \frac{R}{F}. \quad (9.7)$$

Энергетическую эффективность систем с ортогональными сигналами можно выразить через отношение

$$\alpha = \frac{E_0}{N_0},$$

где $E_0 = E/\log m$ — удельная энергия, которая необходима для передачи одного бита информации; E — энергия сигнала; $m = 2^k$ — число ортогональных сигналов; k — число бит информации, передаваемой в течение длительности сигнала.

$$\beta = \frac{R}{\rho_0} = \frac{RN_0}{P_c} = \frac{N_0}{P_c \tau_{\text{и}}} = \frac{N_0}{E_0} = \frac{1}{\alpha},$$

где $R = 1/\tau_{\text{и}}$; $\tau_{\text{и}}$ — длительность одного информационного символа.

Подставляя выражения (9.7) в (9.6), получим

$$\eta = \frac{\gamma}{\log(\gamma/\beta + 1)}, \quad \gamma = \rho\beta. \quad (9.8)$$

В идеальной системе связи коэффициент использования пропускной способности равен единице при сколь угодно малой вероятности ошибки. Подставляя это значение в (9.8), получим зависимость между энергетической и частотной эффективностью для идеальной системы связи:

$$\gamma = \log(\gamma/\beta + 1); \quad \beta = \gamma/(2^\gamma - 1). \quad (9.9)$$

График функции приведен на рис. 9.1 (кривая 1). Каждой точке кривой соответствует идеальная система связи. Поскольку число точек на этой кривой равно бесконечности, то число идеальных систем также равно бесконечности. В каждой из этих систем коэффициент использования пропускной способности равен единице.

Максимальное значение энергетической эффективности найдем из (9.9):

$$\beta_{\max} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\gamma}{2^{\gamma} - 1} = \frac{1}{\ln 2} \approx 1,443 \text{ (1,59 дБ)}.$$

Для исследуемых систем рассчитывают аналогичные кривые.

В реальных системах связи коэффициент использования пропускной способности канала меньше 1. Поэтому следует ожидать, что кривые для реальных систем будут располагаться ниже кривой, соответствующей идеальным системам.

На рис. 9.1 приведены рассчитанные кривые зависимостей энергетической эффективности от частотной для идеальных систем связи (кривая 1), для системы связи, в которой используются биортогональные сигналы одинаковой энергии (кривая 2) и для системы связи, в которой применяются ортогональные некогерентные ЧМ сигналы одинаковой энергии (кривая 3). Вероятность ошибки, определяющая помехоустойчивость реальных систем связи, выбрана одинаковой. Цифры на кривых указывают число сигналов выбранного ансамбля.

Сравнивая характеристики систем, отметим следующее:

- характеристики реальных систем хуже характеристик идеальных систем;
- системы с биортогональными сигналами имеют лучшие характеристики по сравнению с системами, в которых используются ортогональные сигналы;
- энергетическая эффективность систем связи (как с биортогональными, так и с ортогональными сигналами) увеличивается по мере увеличения числа используемых сигналов. При этом частотная эффективность этих систем уменьшается.

При решении задач оптимизации космических и спутниковых систем связи на одно из первых мест выдвигается проблема создания бортового оборудования с малым весом, малыми габаритами и небольшой потребляемой от источника питания мощностью. Перечисленным требованиям отвечают системы с высокой энергетической эффективностью, характеристики которых расположены в левой верхней части рис. 9.1. Если важнейшим показателем качества является не энергетическая, а частотная эффективность

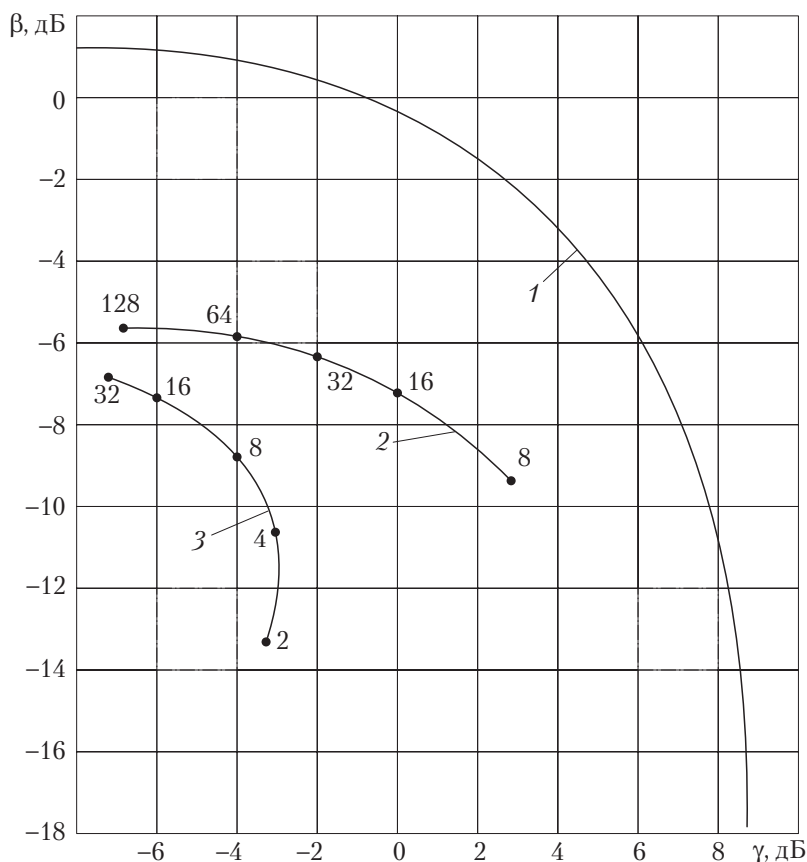


Рис. 9.1. Кривые энергетической и частотной эффективности систем связи

систем связи, то характеристики таких систем будут определяться нижней правой областью рисунка.

Таким образом, построение и анализ кривых $\beta = f(\gamma)$ позволяет из ряда вариантов систем отбросить заведомо негодные варианты. Однако выбор системы по показателям эффективности β , γ не может быть окончательным, так как при этом не учитываются другие важные показатели, например стоимость.

Контрольные вопросы

1. Что называют эффективностью системы связи и как она определяется количественно?
2. Сформулируйте задачу отыскания оптимальной системы связи. Как записываются условия оптимальности?
3. Что понимают под синтезом системы? Что такое математический и инженерный синтез системы?
4. В чем сущность системного подхода к исследованию и разработке систем связи?
5. Какие математические выражения определяют энергетическую и частотную эффективность систем связи? Как эти характеристики связаны между собой в идеальной системе связи?
6. Чем отличаются характеристики эффективности реальных систем связи от идеальной системы связи?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория электросвязи — фундаментальная дисциплина, которая своим содержанием определяет профессиональную подготовку инженеров.

Начало формирования теории электросвязи как отдельной самостоятельной дисциплины связывают с появлением фундаментальных работ В.А. Котельникова и К.Э. Шеннона. Влияние этих работ на теорию электросвязи огромно и не уменьшилось до настоящего времени, несмотря на существенный прогресс в развитии этой теории.

Дальнейшее развитие теории будет происходить и в обозримом будущем. Это объясняется тем, что потребность в качественной передаче и обработке непрерывно растущих объемов информации постоянно нарастает. При этом основная проблема теории связи, связанная с отысканием методов передачи и приема, обеспечивающих получение требуемой достоверности принимаемых сообщений и повышение скорости передачи, все еще остается актуальной.

Содержание глав данного учебника охватывает основные разделы теории, позволяющие решать задачи передачи информации от источника до потребителя сообщений. Они не выходят за рамки действующей программы по дисциплине «Теория электрической связи» и изложены на основе известных, проверенных методов. Теоретические положения доведены до инженерных расчетов. Спектральный анализ дополнен формулами для спектральной плотности и спектральной плотности мощности периодических сигналов. Приведенные в учебнике расчеты информационных характеристик источников непрерывных сообщений и непрерывных каналов (дифференциальной энтропии, производительности источника, скорости передачи информации) позволяют не только обойти вычислительные трудности (так как предполагают использование ЭВМ), но и углубить понимание показателей качества.

Из-за ограниченности объема издания отдельные направления теории остались за рамками данной книги. Это в первую очередь касается:

□ оптимальных методов приема сигналов на фоне помех, основанных на нелинейной теории фильтрации случайных марковских

процессов (непрерывных и дискретных), и оценки помехоустойчивости этих методов;

□ теории поиска и синхронизации, в том числе шумоподобных сигналов, включающей анализ и синтез устройств поиска и синхронизации и оценки их помехоустойчивости;

□ теории адаптивных систем, позволяющих обеспечить высокую достоверность передачи сообщений в каналах с переменными параметрами при неполной априорной информации о сигналах и помехах.

С этими и другими направлениями теории электросвязи любознательный читатель может ознакомиться по монографиям и научным статьям после изучения материала данной книги.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Дельта-функция, ее свойства

Выберем функцию $u(t)$, близкую к единичной, и вычислим производную $u'(t)$. Графики функции и ее производной приведены на рис. П.1.1.

Дельта-функция — это предел производной $u'(t)$, если $a \rightarrow 0$:

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} u'(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{u(a/2) - u(-a/2)}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a}. \quad (\text{П.1.1})$$

Основные свойства дельта-функции:

1. Дельта-функция является четной функцией.
2. При стремлении знаменателя выражения (П.1.1) к нулю ($a \rightarrow 0$) дельта-функция стремится к бесконечности.
3. Площадь, ограниченная дельта-функцией, равна 1, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

4. Если аргумент дельта-функции равен $t - t_0$, то такая функция не равна нулю только в момент времени $t = t_0$.

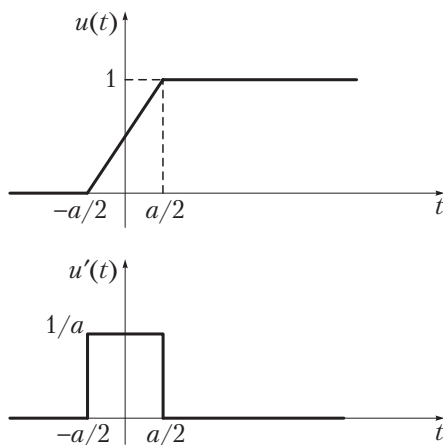


Рис. П.1.1. Функция и производная функции

5. *Фильтрующее* свойство дельта-функции: интеграл от произведения некоторой функции $u(t)$ и дельта-функции равен значению функции $u(t)$ в момент времени, для которого дельта-функция не равна нулю.

Например:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\delta(t)dt = u(0); \quad \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau)\delta(t)dt = u(-\tau).$$

6. Спектральная плотность дельта-функции

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = 1.$$

7. Обратное преобразование Фурье от спектральной плотности дельта-функции дает следующий важный результат:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega. \quad (\text{П.1.2})$$

Размерность этой дельта-функции: [1/с].

8. В частотной области дельта-функция записывается в виде

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt. \quad (\text{П.1.3})$$

Размерность этой функции — секунда на радиан: [с/рад].

Дельта-функция является примером так называемых обобщенных функций, определяемых как пределы последовательностей непрерывных функций. Примером последовательностей непрерывных функций является совокупность прямоугольных импульсов единичной площади, длительность которых a , высота $1/a$ (см. рис. П.1.1).

2. Коды Баркера

Последовательность символов 1, -1 длиной N , $N = 2, 3, 4, \dots$, автокорреляционные функции которых равны N при нулевом сдвиге и 0 или ∓ 1 при других сдвигах, называются кодами Баркера.

Установлено, что коды Баркера существуют, если $N = 2, 3, 4, 5, 7, 11, 13$. Для других значений N боковые остатки автокорреляционных функций последовательностей выходят за границы значений -1 и 1 .

Сигнал, кодированный кодом Баркера длиной $N = 3$, имеет автокорреляционную функцию, приведенную на рис. 2.8. Коды Баркера могут использоваться в системах связи в качестве синхронизирующих последовательностей.

3. Ортогональные коды

Из числа ортогональных функций (математических моделей сигналов) в системах связи чаще других используют двоичные функции, которые определяются ортогональными кодами. Достаточно широкий класс этих кодов формируется на основе матриц Адамара.

Под матрицами Адамара понимают квадратные матрицы с элементами -1 или 1 . Строки и столбцы этих матриц можно использовать для формирования ортогональных кодовых комбинаций (слов). Матрицы Адамара имеют порядок либо $N = 2^k$, либо $N = 2k$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Например, матрица $A_{N \times M}$ имеет порядок NM . Она получена из матрицы Адамара A_M подстановкой матрицы A_N вместо элемента 1 и $-A_M$ вместо элемента -1 .

Пусть требуется найти матрицу Адамара порядка 8 по матрицам Адамара порядка 2 и 4.

Матрица порядка 2:

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Матрица порядка 4:

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Матрица порядка 8:

$$A_8 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Аналогично можно получить матрицы более высокого порядка. Если первая строка и первый столбец матрицы содержат только единицы, то такая матрица считается записанной в нормальной форме.

Строки и столбцы этих матриц Адамара можно использовать для формирования ортогональных кодовых слов, так как каждая пара строк (столбцов) удовлетворяет условию ортогональности:

$$r_{i,j}(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_{i,k} b_{j,k} = 0,$$

где a_i, b_j — элементы кодовых слов строк или столбцов ортогонального кода.

В частности, матрице Адамара порядка $N = 2^k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, соответствует код Уолша из кодовых комбинаций длиной 2^k . Например, матрице порядка 8 (см. выше) соответствует код Уолша из кодовых комбинаций длиной 8 (см. рис. 2.18).

Последовательности Уолша не относятся к числу самосинхронизирующихся последовательностей, так как боковые «остатки» их автокорреляционных функций имеют сравнительно большие значения, которые приближаются к значениям основных лепестков. По этой причине передачу модулированных двоичными информационными послылками последовательностей Уолша сопровождают специально сформированными сигналами синхронизации.

На основе матрицы Адамара порядка 2 строятся семейства ортогональных Д-кодов длиной $N = 2^k$, $k = 1, 2, 3, \dots$.

Обозначим слова Д-кода длиной $N = 2^k$ буквой A^k . По слову A^k можно найти пару слова $\bar{A}^k$, у которой первые 2^{k-1} символов совпадают с первыми 2^{k-1} символами слова A^k , а последние 2^{k-1} символов не совпадают. По любому слову A^k можно найти негативное слово $\underline{A}^k$, если у слова A^k изменить все символы на противоположные.

В семействе Д-кода имеется 2^k кодовых слова, которые отличаются следующими свойствами:

1. Каждому слову семейства соответствует пара этого слова, а количество таких пар равно 2^{k-1} .

2. Слова с неравными порядковыми номерами $i \neq j$ удовлетворяют условию ортогональности.

3. Д-коды являются самосинхронизирующимися, т.е. боковые «остатки» автокорреляционных функций их слов имеют относительно малые значения по сравнению со значениями автокорреляционных функций при нулевых сдвигах.

4. Первая половина семейства Д-кодов длиной 2^k формируется из двух слов Д-кода в 2 раза меньшей длины по правилу

$$A^k = A^{k-1} | \bar{A}^{k-1},$$

где $|$ — знак присоединения к слову Д-кода длиной 2^{k-1} его пары.

Вторая половина семейства формируется из двух слов в 2 раза меньшей длины по правилу

$$A^k = A^{k-1} | \underline{\bar{A}}^{k-1},$$

где $\underline{\bar{A}}^{k-1}$ — негатив пары.

К примеру, найдем Д-код длиной 4 по исходной матрице Адамара:

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Первая строка этой матрицы определяет первое кодовое слово Д-кода $A_1^1 = 11$, вторая строка — слово $A_2^1 = 1 - 1$. Верхние индексы слов определяют их длину. Нижние индексы определяют порядковые номера слов кода.

Первую половину семейства Д-кодов длиной 4 находим по формуле

$$A^k = A^{k-1} | \bar{A}^{k-1}.$$

Для этого к слову $A_1^1 = 11$ присоединяем пару $\bar{A}_1^1 = 1 - 1$. Получим кодовое слово $A_1^2 = A_1^1 | \bar{A}_1^1 = 111 - 1$. К слову $A_2^1 = 1 - 1$ присоединяем пару $\bar{A}_2^1 = 11$. Получим слово $A_2^2 = A_2^1 | \bar{A}_2^1 = 1 - 111$.

Вторую половину семейства Д-кодов длиной 4 находим по формуле

$$A^k = A^{k-1} | \bar{A}^{k-1}.$$

Для этого к слову $A_1^1 = 11$ присоединяем негатив пары $\bar{A}_1^1 = -11$. Получим слово $A_3^2 = A_1^1 | \bar{A}_1^1 = 11 - 11$. К слову $A_2^1 = 1 - 1$ присоединяем негатив пары $\bar{A}_2^1 = -1 - 1$. Получим слово $A_4^2 = A_2^1 | \bar{A}_2^1 = 1 - 1 - 1 - 1$. Д-код длиной 4 равен

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Аналогично находятся Д-коды длиной 8, 16, 32 и т.д.

4. Симплексные коды

Рациональный способ нахождения симплексных кодов связан с получением и использованием математических уравнений, которые определяют правило кодирования и структурную схему генератора этих кодов. Такими уравнениями являются рекуррентные уравнения, известные для ряда последовательностей: M -последовательностей, последовательностей Лежандра, последовательностей Холла и последовательностей Якоби, которые отличаются тем, что нормированные периодические автокорреляционные функции их кодовых последовательностей удовлетворяют условию

$$r(q) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k a_{k+q} = \begin{cases} 1, & q = 0, \\ -1/N, & q \neq 0, \end{cases}$$

где a_k — элементы кодовой последовательности, принимающие значения $\{-1, 1\}$; N — период последовательности; q — сдвиг элементов.

Периодическая автокорреляционная функция кодовой последовательности при нулевом сдвиге равна 1, а при остальных сдвигах равна $-1/N$. Такая функция называется *двухуровневой автокорреляционной функцией*. Очевидно, что если периодическая автокорреляционная функция является двухуровневой, то все циклические сдвиги кодовой последовательности определяют симплексный код.

M -последовательности, последовательности Лежандра, последовательности Холла и последовательности Якоби являются линейными рекуррентными последовательностями, удовлетворяющими следующему рекуррентному уравнению:

$$a_i = c_0 + c_1 a_{i-1} + c_2 a_{i-2} + \dots + c_n a_{i-n}, \quad (\text{П.4.1})$$

где значения кодового слова a_i , как и коэффициенты c_i , принадлежат двоичному алфавиту, т.е. равны или 0, или 1, а суммирование производится по модулю два.

Уравнение (П.4.1) называется правилом кодирования, а число n — памятью. Коэффициент c_0 принимают равным нулю и уравнение записывают в виде:

$$a_i = c_1 a_{i-1} + c_2 a_{i-2} + \dots + c_n a_{i-n}. \quad (\text{П.4.2})$$

Полученное уравнение определяет структуру генератора последовательности. В генераторе последние n символов запоминаются, а затем суммируются по модулю два с весами c_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Для M -последовательности с периодом $N = 15$ структурная схема генератора приведена на рис. 3.38. Работа генератора описывается в п. 3.7.2.

Отметим, что период генерируемой последовательности по уравнению (П.4.2) $N \leq 2^k - 1$, $k = 2, 3, \dots$. Линейные рекуррентные последовательности с максимальным периодом $N = 2^k - 1$ называются M -последовательностями.

Литература

1. *Агеев Д.В.* Основы теории линейной селекции / Д.В. Агеев // Научно-технический сборник ЛЭИС. 1935. № 10.
2. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы / С.И. Баскаков. М. : Высш. шк., 1988.
3. *Бернард С.* Цифровая связь. Теоретические основы и принципы применения / С. Бернард; пер с англ. М. : Вильямс, 2003.
4. *Бронштейн И.Н.* Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. 13-е изд. М. : Наука, 1986.
5. *Гуткин Л.С.* Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах / Л.С. Гуткин. М. : Сов. радио, 1972.
6. *Заездный А.М.* Фазо-разностная модуляция / А.М. Заездный, Ю.Б. Окунев, Л.М. Рахович. М. : Связь, 1967.
7. *Заездный А.М.* Основы расчетов по статистической радиотехнике / А.М. Заездный. М. : Связь, 1969.
8. *Залманзон Л.А.* Преобразование Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях / Л.А. Залманзон. М. : Наука, 1989.
9. *Клюев Л.Л.* Теория электрической связи / Л.Л. Клюев. Минск : Техноперспектива, 2008.
10. Теория электрической связи: учебник для вузов / А.Г. Зюко, Д.Д. Кловский, В.Н. Коржик, М.В. Назаров; под ред. Д.Д. Кловского. М. : Радио и связь, 1999.
11. *Котельников В.А.* Теория потенциальной помехоустойчивости / В.А. Котельников. М. : Госэнергоиздат, 1956.
12. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1 / Б.Р. Левин. М. : Сов. радио, 1974. Кн. 2, 1975. Кн. 3, 1976.
13. *Тихонов В.Н.* Статистическая радиотехника / В.Н. Тихонов. М. : Сов. радио, 1982.
14. *Шеннон К.Э.* Математическая теория связи // Работы по теории информации и кибернетике / под ред. Р.Л. Добрушина, О.В. Лупанова; пер. с англ. М. : ИЛ, 1963.

Предметный указатель

А

- Автокорреляционная функция
 - двухуровневая 438
 - кодовой последовательности 61
 - периодического сигнала 59
 - периодической кодовой последовательности 63
 - периодической кодовой последовательности двухуровневая 438
 - сигнала 52
 - случайного процесса 225
 - случайного процесса нормированная 226
- Алфавит 23
- Анализ 112
- Аналитический сигнал 67
- Ансамбль реализаций 212

Б

- База сигнала 17
- Базисные функции 32, 33
- Белый шум 230
- Блок 23

В

- Вектор ошибки 250
- Верность передачи 28
 - потенциальная 370
- Вероятность
 - апостериорная 268
 - априорная 269
 - ложной тревоги 365
 - пропуска сигнала 365
 - реализации случайной величины 215
- Взаимно корреляционная функция 57
 - случайного процесса 225
- Волоконные световоды 254
- Время передачи информации 21

Выборка 81

Выигрыш в помехоустойчивости 367

Г

Генерация цифровая 380

Д

- Девияция частоты 127
- Декодер 26
- Декодирование
 - дельта-модулированного сигнала 180
 - ИКМ сигнала 179
 - сигнала с ДИКМ 179
- Дельта-функция 432
- Демодулятор 26
- Демодуляция 26
- Детектирование
 - АИМ сигнала 178
 - когерентное АМ-ОБП сигнала 185
 - когерентное двоичного ФМ сигнала 187
 - когерентное сигналов с ОФМ 188
 - когерентное ШС 191
 - некогерентное двоичных АМ, ЧМ сигналов 173
 - некогерентное непрерывного АМ сигнала 170
 - непрерывного ЧМ сигнала 175
 - сигналов с ШИМ и ФИМ 183
 - синхронное 184
- Детектор синхронный 184
- Диаграмма направленности 416
- Диапазон динамический
 - канала 22
 - сигнала 16
- Диапазон коротковолновый (КВ) и ультракоротковолновый (УКВ) 248
- Дискретизатор 79
- Дискретизация 79

Дискретизирующая последовательность 198

Дискретный выбор 424

Дисперсия 217

Дифференциальная энтропия 276

Длина

– блока 23

– вектора 70

Длительность сигнала 16

З

Задача

– детектирования 112

– модуляции 111

– преобразования сигнала 90

– преобразования спектра 91

Задержка передачи 29

Замирание сигнала 241

– гладкое 242

– общее 242

– рэлеевское 241

– селективное 242

И

Изменения параметров сигналов 239

Импульсная характеристика 92

Индекс модуляции

– амплитудной 118

– частотной дискретной 137

– частотной непрерывной 127

Интервал

– дискретизации 163

– защитный 405

– квантования 165

– корреляции 226

Информационная двоичная последовательность 134

Информация 14, 270

Искажение

– информации 19

– сигнала 239

Источник сообщения

– аналоговый 15

– дискретный 15

– дискретный, без памяти 222

– стационарный 222

К

Канал

– дискретно-непрерывный нестационарный 253

– дискретно-непрерывный однородный без памяти 253

– дискретный однородный без памяти 250

– направленный 253

– ненаправленный 253

– непрерывно-дискретный 20

– непрерывный 20, 245

– оптический 253

– радиоканал 21

– связи 20

– с рэлеевскими замираниями 249

Канальный оператор 394

Квантование 164

Код 23

– абсолютный 140

– двоичный 163

– модуляционный сигнала с ОФМ 134

– модуляционный ЧМ сигнала 142

– модуляционный ШС 152

– неравномерный 24

– ортогональный 63

– помехоустойчивый 24

– равномерный 24

– симплексный 74

Кодер 24

Кодирование 23

Кодовая комбинация 23

Колебания

– гармонические 32

– когерентные 134

– комбинационные 99

- напряжения 15
- некогерентные 134
- тока 15
- Компандирование 168
- Компрессирование 168
- Коррелятор 302
- Коэффициент
 - гармоник 243
 - сжатия 316
- Коэффициенты Берга 101
- Критерий оптимальности
 - информационный 298
 - максимальной обратной вероятности 298
 - максимума отношения правдоподобия 299
 - максимума функции правдоподобия 369

Л

- Линия задержки идеальная 94

М

- Математическая модель
 - блока (системы) 89
 - канала 245
 - модулятора 111
- Мера верности сообщения 29
- Модулятор 25
- Модуляция
 - амплитудная непрерывная 113
 - двоичная АМ 114, 121
 - дельта-модуляция 168
 - дискретная 25, 134, 138
 - импульсного переносчика 158
 - импульсно-кодовая 163
 - инверсная ШС 152
 - квадратурная двоичная фазовая 146
 - многократная (многопозиционная) 138
 - непрерывная 25, 138
 - угловая 126

- фазовая 127
- фазовая двукратная 138
- Момент 1-го и 2-го порядка 216
- Мощность сигнала 17
- Мультипликативность 85

Н

- Ненадежность дискретного канала 271
- Норма вектора 71

О

- Обнаружение сигнала 294
- Обобщенный выигрыш 367
- Обобщенный рэлеевский закон 241
- Обработка сигнала 26
- Объем
 - канала 22
 - сигнала 17
- Одномерная плотность 216
- Однополосный АМ сигнал 123
- Оператор 89
- Определитель Грама 395
- Ортогональные векторы 71
- Основные параметры сигнала 16
- Отношение сигнал/шум 292, 367
- Отсчет 76
- Оценка слова блока 300
- Ошибка
 - q -кратная 250
 - аномальная 379

П

- Параметр обнаружения 308
- Параметры канала 21
- Парсеваля равенство 52
- Передачик 18
- Передача информации синхронная
 - параллельная 391, 395, 405
 - последовательная 391, 414
- Перемодуляция 118
- Переносчик (носитель) сообщения 15

Пик-фактор сообщения 371
Плотность распределения вероятности 214

- огибающей 233
- одномерная 216
- смеси сигнала и шума 246
- условная 216
- фазы 233

Поиск сигнала 324
Показатели качества 28
Полином 98
Полоса пропускания канала 22
Поляризация 419
Помеха

- аддитивная 244
- взаимная 393
- внешняя 19, 244
- внутренняя 20, 243
- мультипликативная 244

Помехоустойчивость потенциальная 27
Порядок комбинационного колебания 99
Последовательность

- Бернулли 222
- информационная 134
- кодовая 23
- линейная 148
- нелинейная 148
- псевдослучайная 148

Посылка сигнала 143
Представляющий (информационный) параметр 16
Преобразование

- Гильберта 67
- Лапласа дискретное 209
- z -преобразование 208
- Фурье быстрое 204
- Фурье дискретное (прямое, обратное) 202
- Фурье (прямое, обратное) 38
- частоты 105

Преобразователь аналого-цифровой 163

Прием 27

- адаптивный 351
- в целом 295
- оптимальный 294
- посимвольный 294

Приемник 19

- корреляционный 302, 397
- на согласованных фильтрах 397
- неоптимальный 342
- оптимальный 26

Признак сигнала 392
Производительность источника

- аналоговых сообщений 286
- дискретных сообщений 274

Пропускная способность

- дискретного канала 287
- непрерывного канала 289
- системы связи 29

Пространство

- Гильберта 72
- евклидово 72
- неевклидово 74
- нормированное метрическое 72
- функциональное 72

Р

Радиосигнал 17
Разделение сигналов

- амплитудное 392
- временное 414
- по форме (кодвое) 408
- пространственное 416
- фазовое 412
- частотное 405

Разность фаз посылок сигнала 143
Разнос частот 137
Распознавание сигналов 302, 310
Распределение Рэлея 241
Расстояние

- между векторами 71
- Хэмминга 75

Реализация случайного процесса 212
Регенерация импульсов 381
Ретрансляция сигнала 381

Ряд

- Котельникова 78, 81
- Уолша 85
- Фурье в комплексной форме 34
- Фурье в тригонометрической форме 35
- Фурье обобщенный 33

С

Свертка спектров 75

Свойство аддитивности/однородности 90

Связь 17

Сеть связи 18

Сжатие сигнала 316, 349

Сигнал 15

- аналитический 67
- аналоговый 16
- бигармонический 98
- вторичный 15
- гармонический 32
- групповой 390
- двоичный 16
- детерминированный 15
- дискретный 16
- канальный 390
- квазигармонический 70
- кодированный 62
- модулированный 15
- модулируемый 15
- модулирующий 15
- непрерывный 16
- однополосный 123
- ортогональный 73, 310
- первичный 15
- противоположный 310
- с активной паузой 134
- случайный 15
- с пассивной паузой 121
- узкополосной 69
- цифровой 16
- широкополосный 157
- шумоподобный 25, 148
- эквивалентный 283

Синтез

- инженерный 300, 423
- математический 300, 423
- оптимального приемника 300
- системы 423

Система передачи данных 20

Система радиосвязи 19

Система связи

- автоматизированная 20
- адаптивная 183
- аналоговая 20
- дискретная 20
- дуплексная 20
- линейная 89
- многоканальная 20, 390
- многоканальная асинхронная 403
- многоканальная синхронная 397
- нелинейная 90
- неоптимальная 424
- нестационарная 89
- оптимальная 424
- оптическая 19
- параметрическая 90
- проводная 19
- симплексная 20
- смешанная 20
- стационарная 89
- телевизионная 20
- телеграфная 20
- телефонная 20
- цифровая 20

Скалярное произведение 71

Скважность 37

Скорость передачи информации 29

Слово 23

Случайный процесс 212

- марковский простой 222
- нестационарный 219
- нормальный 227
- стационарный 218
- узкополосный 231
- центрированный 217
- эргодический 219

Сообщение 14
Спектр
– дискретный 35
– ограниченный 76
– энергетический 52
Спектральная плотность
– амплитуд 40
– мощности сигнала 52
– периодического сигнала 41
– периодической автокорреляционной функции сигнала 60
– фаз 40
Способ
– сравнения фаз 338
– уплотнения 391
Среда распространения 19
Среднеквадратичное отклонение 28
Структура приемника оптимальная 294

Т

Теорема Котельникова 76
Тракт 18

У

Угол отсечки 99
Узел 18
Условие согласования сигнала с каналом 22
Условная плотность распределения вероятности 216
Устройства
– поиска и слежения 194
– синхронизации 407
– тактовой синхронизации 194

Ф

Фаза мгновенная 69
Фильтр
– дискретный 195
– квазиоптимальный 344

– нижних частот 171
– полосовой 105, 123, 175
– согласованный 315
– цифровой 195
Фильтрующее свойство дельта-функции 433
Флуктуационные шумы 243
Формирователь группового сигнала 390
Формула Шеннона 292
Функция 31
– автокорреляционная 225
– базисная 32
– детерминированная 31
– комплексная 32
– корреляции 217
– Крампа 353
– кусочно-линейная 99
– периодическая 37
– правдоподобия 247, 269
– распределения n -мерная интегральная 212
– системная 208
– случайная 31, 212
– целевая 422
– экспоненциальные 34

Х

Характеристика обнаружения сигнала 365

Ц

Центрированный процесс 217
Цифровая обработка сигнала 194, 380
Цифровой линейный автомат 148

Ч

Частота 69
Частотная модуляция
– дискретная 134
– непрерывная 126

Ш

Ширина

- полосы пропускания канала 22
- спектра сигнала 16, 116, 118

Шум

- белый 230
- дробовой 243
- квантовый 243
- тепловой 243

Э

Экспандирование 168

Электросвязь 17

Энергетический критерий 117

Энергия сигнала 17

Энтропия

- дискретного источника 271
- квантованного отсчета 279
- средняя условная 271

Эпсилон-энтропия 283

Эффективность 421, 426

По вопросам приобретения книг обращайтесь:

Республика Беларусь

ООО «Новое знание»
220050, а/я 79, Минск.
Тел./факс: (10-375-17) 211-50-38.
E-mail: nk@wnk.biz
<http://wnk.biz>

Российская Федерация

Отдел оптовых продаж «ИНФРА-М»:
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1.
Тел. (495) 280-15-96; факс (495) 280-36-29.
E-mail: books@infra-m.ru

Отдел «Книга – почтой»:
Тел. (495) 280-15-96 (доб. 246)

Учебное издание

Высшее образование

Клюев Леонид Леонидович

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

Учебник

Ответственный за выпуск С.В. Исаенко

Оригинал-макет подготовлен ООО «Новое знание»

Подписано в печать 12.08.2015.

Формат 60×90 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Гарнитура Петербург.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 28. Уч.-изд. л. 21,95.

Тираж 500 экз. Заказ № 9962.

Общество с ограниченной ответственностью «Новое знание».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,

распространителя печатных изданий № 1/276 от 04.04.2014.

Пр. Пушкина, д. 15, ком. 16, Минск, Республика Беларусь.

Почтовый адрес: а/я 79, 220050, Минск, Республика Беларусь.

Телефон/факс: (10-375-17) 211-50-38

E-mail: nk@wnk.biz <http://wnk.biz>

ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»

127282, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1

Тел.: (495) 380-05-40, 380-05-43. Факс: (495) 363-92-12

E-mail: books@infra-m.ru <http://www.infra-m.ru>



Отпечатано в ОАО «Можайский полиграфический комбинат».

143200, г. Можайск, ул. Мира, 93.

www.oaompk.ru, www.oaompk.rf, тел.: (495) 745-84-28, (49638) 20-685

ИЗДАТЕЛЬСТВО



“НОВОЕ ЗНАНИЕ”

Для записей

Наши координаты:
в Минске: (+375-17) 211-50-38, e-mail: sale@wnk.biz

<http://wnk.biz>